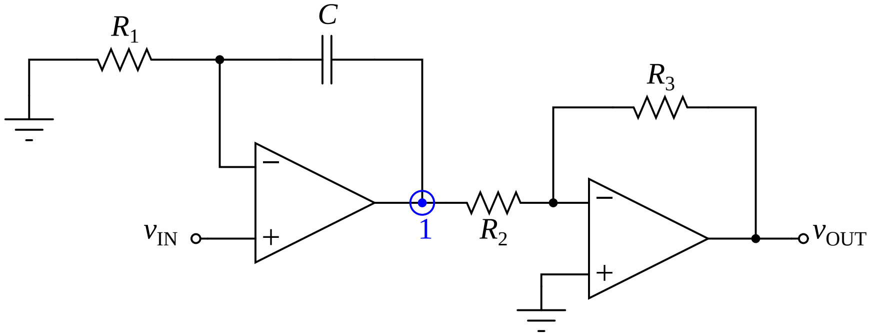
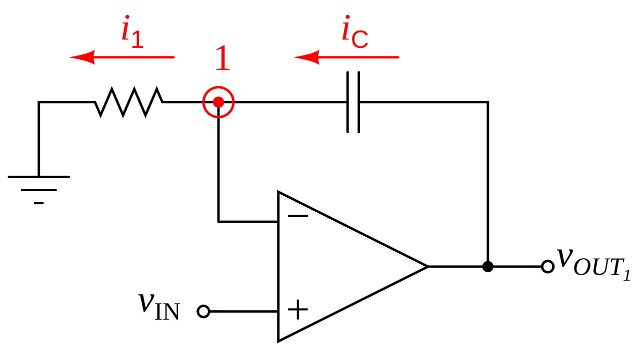
Tema d'esame del 6 Novembre 2007 - Esercizio 2

Il circuito illustrato in figura ha due amplificatori operazionali ideali, tre resistenze R_1= 120 Ω, R_2= 100 Ω e R_3= 150Ω, e una capacità C = 4.7 nF.



A. Si ricavi la tensione di uscita v_{OUT} in funzione della tensione di ingresso v_{IN}.

Essendo il circuito composto da due amplificatori operazionali in cascata, lo possiamo spezzare in due circuiti più semplici nel nodo 1, evidenziato in blu nella precedente figura. A questo punto si risolve la prima parte del circuito, calcolando v_{OUT_1}.



Essendo l'amplificatore operazionale ideale, vale il principio di terra virtuale:

[1] v^+- v^-= 0.

[2] v^+= v^-.

[3] v^+= v_{IN} = v^-.

Applicando la KCL (Kirchhoff Current Law) al nodo 1 posso scrivere:

[4] i_C- i_1= 0.

[5] i_C= i_1.

Utilizzando la legge di Ohm posso calcolare i_1:

[6] $i_1 = \dfrac{v_1}{R_1}$;

Poichè la tensione applicata ad un bipolo è pari alla differenza tra la tensione applicata al nodo positivo e quello negativo, calcolo v_1 usando l'equazione [3]:

[7] $v_1 = v^-$- 0 $= v_{IN}$;

e la sostituisco nell'equazione [6]:

[8] $i_1 = \dfrac{v_{IN}}{R_1}$;

allo stesso modo calcolo anche la tensione applicata al condensatore:

[9] $v_C = v_{OUT_1}$ - v^-;

[10] $v_C = v_{OUT_1}$ - v_{IN}.

e la corrente nel condensatore:

[11] $i_C = C\dfrac{dv_c}{dt}$;

a cui sostituisco l'equazione [9]:

[12] $i_C = C\dfrac{d(v_{OUT_1} - v_{IN})}{dt}$.

Ora, utilizzando le equazioni [5], [6] e [12] posso scrivere:

[13] $\dfrac{v_{IN}}{R_1} = C\dfrac{d(v_{OUT_1} - v_{IN})}{dt}$.

Fattorizzo entrambi i membri per $\dfrac{1}{C}$:

[14] $\dfrac{v_{IN}}{R_1}\cdot\dfrac{1}{C} = C\dfrac{d(v_{OUT_1} - v_{IN})}{dt}\cdot\dfrac{1}{C}$;

ed intengro entrambi i membri:

[15] $\displaystyle\int \frac{v_{IN}}{R_1 C} = \int \frac{d(v_{OUT_1} - v_{IN})}{dt}$.

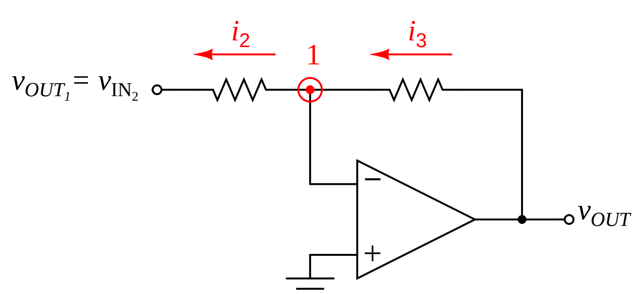
ottenendo:

[16] v_{OUT_1} - $v_{IN} = \displaystyle\frac{1}{R_1 C}\int v_{IN}dt$.

Risolvo rispetto a v_{OUT_1}:

[17] $v_{OUT_1} = \dfrac{1}{R_1 C}\left(v_{IN} + \displaystyle\int v_{IN}dt\right)$.

Risolvo ora la seconda parte del circuito assumendo come tensione di ingresso v_{OUT_1}.



Anche in questo caso posso applicare il principio di terra virtuale:

[18] v^{+}- v^{-}= 0;

[19] v^{+}= v^{-}.

Ed essendo il terminale v^{+}collegato al terminale di terra:

[20] v^{+}= v^{-}= 0.

Ora utilizzo la KCL al nodo 1, scrivendo:

[21] i_2= i_3.

Calcolo la tensione nei bipoli R_2ed R_3 scrivendo:

[22] v_2= v^{-}- v_{IN_2};

[24] v_3= v_{OUT}- v^{-};

che utilizzando l'equazione [20] diventano:

[23] v_2= - v_{IN_2}.

[25] v_3= v_{OUT}.

Grazie alla legge di Ohm ed alle equazioni [23] e [24], calcolo le correnti i_2e i_3:

[26] $i_2 = -\dfrac{v_{IN_2}}{R_2}$;

[27] $i_3 = \dfrac{v_{OUT}}{R_3}$.

Sostituisco le equazioni [26] e [27] nell'equazione [21] ottenendo:

[28] $-\dfrac{v_{IN_2}}{R_2} = \dfrac{v_{OUT}}{R_3}$.

e risolvo rispetto a v_{OUT} fattorizzando R_3:

[29] $R_3 \cdot \left(-\dfrac{v_{IN_2}}{R_2}\right) = \dfrac{v_{OUT}}{R_3} \cdot R_3$;

[30] $v_{OUT} = -\dfrac{R_3}{R_2} \cdot v_{IN_2}$.

Posso infine sostituire a v_{IN_2}l'equazione [17] ottenendo:

[31] $v_{OUT} = -\dfrac{R_3}{R_2} \cdot \left(v_{IN} + \dfrac{1}{R_1 C} \int v_{IN} dt\right)$.

B. Si calcoli la tensione di uscita $v_{OUT}(t)$ quando la tensione di ingresso è data dalla funzione $v_{IN}(t) = V_0 \sin 2\pi f_0 t$, con V_0 = 1V e f_0 = 50 kHz.

Calcolare v_{OUT} in funzione di v_{IN} significa sostituire $v_{IN}(t) = V_0 \sin 2\pi f_0 t$ nell'equazione [31] precedentemente calcolata, calcolando anche l'integrale che caratterizza v_{IN}.

[32] $\int v_{IN} dt$ = -$V_0 2\pi f_0 \cos 2\pi f_0 t$.

Ora sostituisco le equazioni di v_{IN} e $\int v_{IN} dt$ nell'equazione [31] ed ottengo:

$$[33]\ v_{OUT} = -\frac{V_0 R_3}{R_2} \cdot \left(\sin 2\pi f_0 t - \frac{1}{R_1 C}\ 2\pi f_0 \cos 2\pi f_0 t \right).$$