

In ogni esercizio occorre indicare chiaramente, per ogni risposta, il numero della domanda corrispondente

Nota - Riportare lo svolgimento degli esercizi per esteso (quando l'esercizio richiede più passaggi di calcolo, non sarà preso in considerazione se riporta solo le soluzioni). Se una serie di calcoli coinvolge una o più frazioni semplici (numeratore e denominatore interi), per chiarezza, si svolgano i calcoli **mantenendo tali numeri in forma frazionaria** fin dove possibile (non li si converta nelle loro approssimazioni con virgola e decimali: solo il risultato finale sarà eventualmente rappresentato in quest'ultima forma).

Esercizio A - Dadi truccati (Probabilità condizionata, media e momenti)

Un dado a tre facce (etichettate con $\{2, 3, 4\}$) è truccato in modo che la probabilità di ciascun numero sia proporzionale al numero segnato sulla faccia meno 1 (ad esempio $P(4) \propto 3$).

1. Normalizzare i valori e trovare le probabilità $P(i=2)$, $P(i=3)$ e $P(i=4)$
2. Trovare i valori della cumulativa $F(k) \equiv \Pr(i \leq k)$ seguenti $F(0), F(1), F(2), F(3), F(4), F(5)$
3. Calcolare la media
4. Calcolare il momento terzo

Il dado viene lanciato due volte. Siano D l'evento "due esiti diversi",

e sia C l'evento "somma dei numeri indicati sulle facce pari a 6"

5. Calcolare $P(D)$ e $P(C)$
6. Si trovino $P(C|D)$, $P(D|C)$, $P(C \cap D)$
7. Gli eventi C e D sono indipendenti? (*Giustificare mediante calcolo*)

Esercizio B - Monete truccate (Teorema di Bayes, Valore atteso e varianza di una scommessa)

Ho tre monete che chiamo X , Y e Z , caratterizzate dalle seguenti probabilità di dare Croce:

$P(X)=P(Y)=1/3$ e $P(Z)=1/2$. Ne prendo una a caso, la lancio due volte e ottengo due Croci (CC).

1. Qual è la probabilità che si trattasse della moneta X ?

Indico la probabilità che si trattasse della moneta X con p .

Alice ha scommesso contro Bob che si trattasse effettivamente della moneta X puntando 60 euro

2. Quale ammontare u deve puntare Bob affinché la scommessa sia equa?

Dal punto di vista di Alice, la scommessa definisce sui valori $\{-60, u\}$ una distribuzione di probabilità con $P(-60)=P(\neg X|CC)$ e $P(+u)=P(X|CC)$

3. Qual è la deviazione standard di tale distribuzione

Esercizio C - Densità uniforme (Indicatori di posizione e ampiezza)

Sia data la densità di probabilità **uniforme** $f(u)=1/6$ definita sull'intervallo $[-3, 3]$ e nulla altrove (si disegni tale densità), si indichino

1. media $\langle u \rangle$ di tale densità
2. primo quartile (LQ), secondo quartile (**MEDIANA**), terzo quartile (UQ),
3. intervallo interquartile (**IQ**) e la Tukey mean (**TM**) definita da $TM \equiv (LQ+2MEDIANA+UQ)/4$
4. cumulativa $F(u)$ e cumulativa complementare $S(u)$ di tale densità

Sui campioni costituiti da 2 valori estratti a caso dalla stessa densità di probabilità è possibile definire una variabile aleatoria m costituita dalla media aritmetica dei punti.

5. Qual è la media $\langle m \rangle$ della variabile media campionaria

Esercizio D - Staffetta (Gaussiana, Legge 3-sigma)

Quattro sportivi dilettanti formano una squadra e partecipano ad una staffetta quattro per cento, ciascuno ha un tempo di percorrenza medio di 30 secondi con una **deviazione standard** di 10 secondi.

Se i loro tempi di percorrenza seguono una distribuzione normale e sono indipendenti gli uni dagli altri,

1. qual è la probabilità che complessivamente impieghino **meno** di 100 secondi a completare la staffetta?