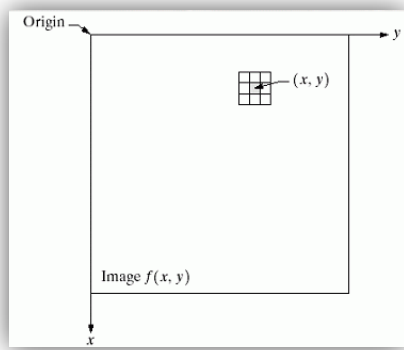
# Capitolo 3
# TRASFORMAZIONI DI INTENSITA' E FILTRAGGIO SPAZIALE

Le trasformazioni di intensità e i filtraggi trattati in questo capitolo lavorano nel *dominio spaziale*, cioè nel piano che contiene i pixel dell'immagine, andando ad applicare una manipolazione diretta dei pixel.
Successivamente vedremo che per poter operare in un *dominio di trasformazione* è necessario prima convertire l'immagine nel dominio della trasformata, applicare il filtraggio e infine calcolare l'antitrasformata che riporta il risultato ottenuto nel dominio spaziale.
L'espressione che riassume i processi nel dominio spaziale, quindi il *filtraggio spaziale*, è la seguente:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{T}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})]$$

dove *f(x, y)* è l'immagine di input, *g(x, y)* è l'immagine di output e *T* è l'operatore definito su *f* nell'intorno di un punto (*x, y*). L'intorno solitamente è rettangolare, centrato su (*x, y*) e piccolo.
Per ogni locazione specifica (*x, y*), il valore dell'immagine di output *g* a quelle coordinate è equivalente al risultato dell'applicazione di *T* alla regione con origine (*x, y*) in *f*.




La più piccola regione possibile misura *1x1*. In questo caso *g* dipende solo dal valore di *f* in un singolo punto (*x, y*) e *T* diventa una funzione di trasformazione dell'intensità, chiamata livello di grigio o mappatura, la cui formula è:

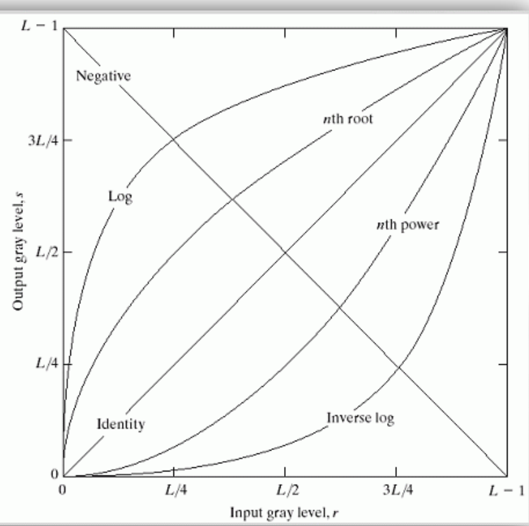
$$s = T(r)$$

dove *s* denota l'intensità di *g*, mentre *r* denota l'intensità di *f* in ogni punto (*x, y*).

I filtraggi solitamente riguardano il miglioramento dell'immagine o *enhancement*, cioè quel processo di manipolazione dell'immagine tale che il risultato sia più adatto dell'originale a una specifica applicazione. Il miglioramento dell'immagine non è un processo valido per qualsiasi ambito, perché in base all'applicazione e al risultato che si vuole ottenere si possono utilizzare diversi tipi di filtraggi. L'esempio migliore è quello dell'ambito medico: in medicina infatti non verranno mai utilizzati filtri che provocano perdita di informazioni nell'immagine.

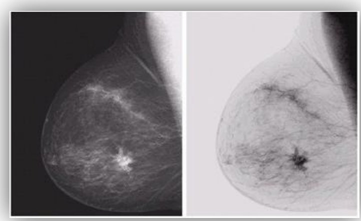
## Funzioni per la trasformazione di intensità
Vediamo ora tre tipologie di funzioni per le trasformazioni di intensità:

**FIGURE 3.3** Some basic gray-level transformation functions used for image enhancement.



**1-** ***lineari (negative e identità)***
Negativo: si ottiene tramite l'espressione

***s = L – 1 – r***

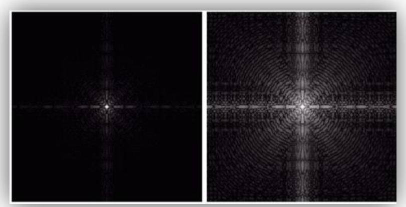


con un'immagine nella gamma [*0, L-1*]
Il risultato ottenuto è l'equivalente di un negativo fotografico, infatti vengono invertiti i livelli di intensità dell'immagine.
Questa elaborazione è utile per migliorare i dettagli bianchi o grigi inseriti nelle regioni scure di un'immagine.

**2-** ***logaritmica (log e log inverso)***
L'espressione che regola la trasformazione logaritmica è la seguente:

***s = c log (1+r)***

dove *c* è una costante ed $r \geq 0$.

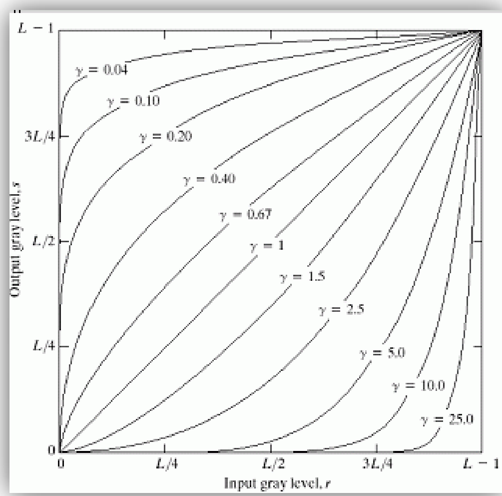


Questa trasformazione associa a una stretta gamma di valori a bassa intensità una gamma più ampia di valori di output; si verifica il contrario con valori più alti dei livelli di input. L'obiettivo quindi è di espandere i valori dei pixel scuri di un'immagine mentre si comprimono i valori di livello superiore.
La caratteristica della funzione logaritmica è quella di comprimere la gamma dinamica delle immagini che presentano ampie variazioni dei valori dei pixel, permettendo di avere maggiore dettaglio.

**3-** ***di potenza [gamma]*** (*potenza n-esima e radice n-esima*)
Le trasformazioni di potenza chiamate anche trasformazioni gamma hanno la forma:

$$s = cr^{\gamma}$$

dove *c* e *γ* sono costanti positive.




Variando *γ* è possibile ottenere varie curve di trasformazione che permettono di migliorare la qualità dell'immagine, migliorare il contrasto e permettere una corretta visualizzazione dell'immagine sullo schermo. Immagini che non hanno un corretto valore di *γ* possono apparire sbiadite o troppo scure. Questo concetto vale non solo per le immagini in toni di grigio, ma anche per le immagini a colori, infatti la correzione gamma non modifica soltanto l'intensità, ma anche le percentuali di rosso, verde e blu, quindi un corretto valore di gamma permette di visualizzare i colori in modo fedele.
Le curve di potenza con valori frazionali di *γ*, come la trasformazione logaritmica, trasformano una stretta gamma di valori di input scuri in una gamma più ampia di valori di ouput. Si verifica l'opposto per valori più alti dei livelli di input. Quindi la differenza con la trasformazione logaritmica è che in questo caso è possibile variare l'esponente per variare la curva di trasformazione.
Le curve generate con *γ > 1* hanno un effetto opposto a quelle con *γ < 1*. Quando *γ = c = 1* otteniamo una trasformazione di identità.

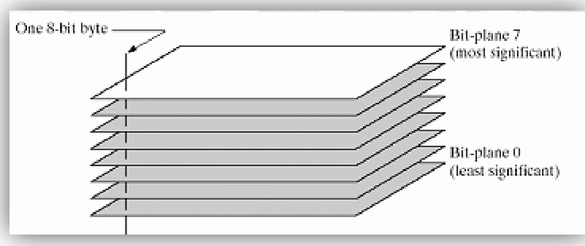
***Funzioni di trasformazione lineare a tratti***

Un metodo alternativo ai tre visti precedentemente è quello di utilizzare le *funzioni di trasformazione lineare a tratti*. Il vantaggio è che la forma può essere arbitrariamente complessa; lo svantaggio è che richiedono input maggiori da parte dell'utente.
Ne vediamo tre tipi:

- **espansione del contrasto** (*stretching*)
E' il processo che amplia la gamma dei livelli di intensità di un'immagine in modo tale che venga utilizzata l'intera gamma di valori nel mezzo di registrazione o nello strumento di visualizzazione.

- **selezione del livello d'intensità** (*Intensity Slicing*):
L'Intensity Slicing è il processo che permette di fare una selezione dei livelli d'intensità utilizzando due metodi principali:
    - andando a visualizzare con un valore (esempio bianco) tutti i valori della gamma di interesse e con un altro (nero) tutte le altre intensità.
    - utilizzare una trasformazione che rende più chiari (o scuri) i valori della gamma desiderata e lascia invariati tutti gli altri livelli di intensità.

- **selezione mediante piani di bit** (*bit-plane*):
Questo tipo di selezione si basa sul fatto che il valore di ogni pixel dell'immagine originale può essere ricostruito dai corrispondenti pixel sui vari piani di bit. Quindi invece che prendere in considerazione la gamma dei livelli di intensità si pone l'attenzione al contributo dato da bit specifici all'aspetto generale dell'immagine.
I piani di bit di ordine superiore contengono la maggior parte delle informazioni dell'immagine, mentre i piani di bit inferiori contengono i dettagli legati alle piccole variazioni di intensità.
Lo scopo di questo tipo di selezione è quello di andare ad analizzare l'importanza relativa di ogni bit, quindi poter determinare l'accuratezza del numero di bit usati per quantizzare l'immagine; migliorare la compressione dell'immagine, in quanto è possibile utilizzare un minor numero di piani di bit per rappresentarla.
La ricostruzione viene fatta moltiplicando i pixel del piano *n-esimo* per la costante $2^{n-1}$ e tutti i piani utilizzati vengono sommati per ottenere l'immagine in scala di grigio.




## Elaborazione di Istogrammi

L'**istogramma** di un'immagine digitale con livelli di intensità nella gamma [*0, L-1*] è una funzione discreta $h(r_k) = n_k$ dove $r_k$ è il valore d'intensità k-esimo ed $n_k$ è il numero di pixel dell'immagine con intensità $r_k$.

La *normalizzazione* di un istogramma avviene dividendo ogni componente per il numero totale dei pixel dell'immagine, quindi tramite la seguente espressione:

$$p(r_k) = r_k/MN \text{ per } k = 0,1,2,...L-1.$$

$p(r_k)$ può essere visto come una stima della probabilità dell'occorrenza del livello di intensità $r_k$ in un'immagine. La somma delle componenti di un istogramma normalizzato deve dare 1.
L'asse orizzontale degli istogrammi corrisponde ai valori di intensità $r_k$. L'asse verticale corrisponde ai valori di $p(r_k) = n_k/MN$ dove *M* e *N* sono le dimensioni dell'immagine.

L'istogramma ci interessa perché quando i pixel di un'immagine occupano l'intera gamma dei livelli di intensità possibili e si distribuiscono uniformemente l'immagine avrà un aspetto ad alto contrasto e mostrerà un'ampia varietà di tonalità di grigio, quindi avremo un'immagine con un ampia gamma dinamica ed una grande quantità di dettagli.

***Equalizzazione di Istogrammi***

Per poter migliorare l'immagine ed ottenere un istogramma uniforme dobbiamo utilizzare l'equalizzazione (o linearizzazione) dell'istogramma tramite la seguente espressione:

$$s_k = T(r_k) = (L-1)\sum_{k=0}^{k} p_r\,(r_k) = \frac{(L-1)}{MN}\sum_{k=0}^{k} n_k$$

Dove *$p(r_k) = n_k/MN$* è la probabilità dei livelli di intensità. *M* e *N* sono le dimensioni dell'immagine e $n_k$ è il numero di pixel che hanno intensità $r_k$. Quindi un'immagine equalizzata si ottiene trasformando ogni pixel dell'immagine di input di intensità $r_K$ in un pixel con intensità $s_K$.

Siccome abbiamo a che fare con valori interi, dobbiamo arrotondare tutti i risultati delle probabilità al valore intero più vicino.

Vediamo un esempio numerico:

Supponiamo di avere un'immagine a 3 bit (L = 8) di 64x64 pixel (MN = 4096), con le seguenti distribuzioni di intensità:

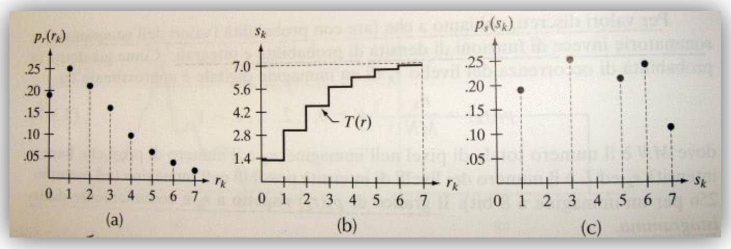
| $r_k$ | $n_k$ | $p(r_k) = n_k/MN$ |
|---|---|---|
| $R_0 = 0$ | 790 | 0.19 |
| $R_1 = 1$ | 1023 | 0.25 |
| $R_2 = 2$ | 850 | 0.21 |
| $R_3 = 3$ | 656 | 0.16 |
| $R_4 = 4$ | 329 | 0.08 |
| $R_5 = 5$ | 245 | 0.06 |
| $R_6 = 6$ | 122 | 0.03 |
| $R_7 = 7$ | 81 | 0.02 |

I valori della funzione di trasformazione dell'equalizzazione dell'istogramma sono ottenuti con l'equazione indicata sopra:

$s_0 = 1.33 \rightarrow 1$
$s_1 = 3.08 \rightarrow 3$
$s_2 = 4.55 \rightarrow 5$
$s_3 = 5.67 \rightarrow 6$
$s_4 = 6.23 \rightarrow 6$
$s_5 = 6.65 \rightarrow 7$
$s_6 = 6.86 \rightarrow 7$
$s_7 = 7.00 \rightarrow 7$

I valori ottenuti sono frazionari perché sono stati ottenuti sommando i valori di probabilità ed è necessario arrotondarli al numero intero più vicino. Alla fine otteniamo solo cinque livelli distinti.

In generale dato che l'istogramma è un'approssimazione di una funzione PDF e nel processo non si possono generare nuovi livelli di intensità, è raro trovare istogrammi perfettamente piatti nella realizzazione pratica dell'equalizzazione di istogrammi. Quindi non può essere provato che l'equalizzazione di un istogramma discreto generi un istogramma uniforme. Solitamente si ottiene un istogramma più plasmato con i livelli di intensità dell'immagine su una gamma più vasta, ottenendo come risultato finale un miglioramento del contrasto.




*(a) istogramma originale*
*(b) Funzione di trasformazione*
*(c) Istogramma equalizzato*

***Matching tra Istogrammi***

Parliamo di matching tra istogrammi (*specifica di un istogramma*) quando indichiamo la forma dell'istogramma che vogliamo ottenere dal processo di enhancement.

Il procedimento da seguire è il seguente:

- calcolare l'istogramma $p_r(r)$ della data immagine ed effettuare l'equalizzazione dell'istogramma tramite l'espressione sopra indicata. Arrotondare i risultati $s_k$ a numeri interi nell'intervallo [*0, L-1*]
- calcolare tutti i valori della funzione di trasformazione *G* utilizzando la seguente equazione:

$$G(z_q) = (L-1)\sum_{i=0}^{q} p_z(z_i)$$

  per $q = 0,1,2,..L-1$ dove $p_z(z_i)$ sono i valori dell'istogramma specificato. Arrotondare i valori di *G* a numeri interi nell'intervallo [*0, L-1*]. Memorizzare i valori di *G* in una tabella.
- per ogni valore di $s_k$ utilizzare i valori di *G* in tabella per trovare i valori corrispondenti di $z_q$ cosicché $G(z_q)$ è il più vicino a $s_k$ e incamerare queste trasformazioni da *s* a *z*. Quando più valori di $z_q$ soddisfano il valore dato $s_k$ (cioè la trasformazione non è univoca) scegliere per convenzione il valore più piccolo.
- ottenere l'immagine dell'istogramma specificato equalizzando prima l'immagine di input e poi trasformando ogni valore equalizzato $s_k$ di questa immagine al corrispondente valore di $z_q$ utilizzando le trasformazioni trovate nel passaggio 3.

Anche se i passi da seguire sono questi, la specifica di un istogramma è un processo che procede per tentativi perché non esistono regole precise ed è necessario procedere caso per caso con un processo di analisi dedicato.

Notiamo che sia l'equalizzazione che il matching sono elaborazioni *globali*, in quanto i pixel vengono modificati da una funzione di trasformazione basata sulla distribuzione di intensità nell'intera immagine.

Vediamo un esempio numerico:

Supponiamo di avere sempre l'immagine di prima, questa volta però vogliamo trasformare l'istogramma in modo tale che abbia i valori specificati nella seguente tabella:

| **$z_q$** | **Specificato $p_z(z_q)$** |
|---|---|
| $z_0 = 0$ | 0.00 |
| $z_1 = 1$ | 0.00 |
| $z_2 = 2$ | 0.00 |
| $z_3 = 3$ | 0.15 |
| $z_4 = 4$ | 0.20 |
| $z_5 = 5$ | 0.30 |
| $z_6 = 6$ | 0.20 |
| $z_7 = 7$ | 0.15 |

Come prima dobbiamo calcolare la scala dei valori dell'istogramma equalizzato:

$s_0 = 1$
$s_1 = 3$
$s_2 = 5$
$s_3 = 6$
$s_4 = 6$
$s_5 = 7$
$s_6 = 7$
$s_7 = 7$

Successivamente calcoliamo tutti i valori della funzione di trasformazione *G* utilizzando l'equazione sopra indicata:

$G(z_0) = 0.00 \to 0$
$G(z_1) = 0.00 \to 0$
$G(z_2) = 0.00 \to 0$
$G(z_3) = 1.05 \to 1$

$G(z_4) = 2.45 \to 2$
$G(z_5) = 4.55 \to 5$
$G(z_6) = 5.95 \to 6$
$G(z_7) = 7.00 \to 7$

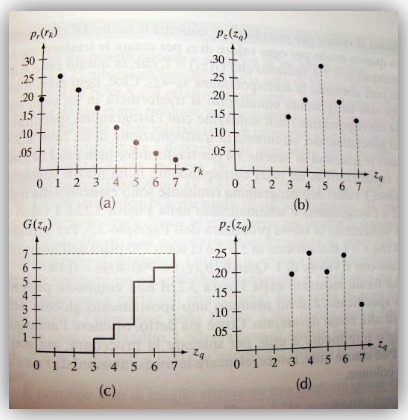
Come nell'esempio precedente, i valori frazionari vengono convertiti in numeri interi nell'intervallo [*0, 7*].
*G* non è strettamente monotona, quindi dobbiamo utilizzare la tecnica vista nel punto 3 dell'algoritmo.
Dobbiamo trovare il valore più piccolo di $z_q$ cosicché il valore $G(z_q)$ è il più vicino a $s_k$. Operiamo in questo modo per ogni valore di $s_k$ per creare le trasformazioni richieste da *s* a *z*.
Ad esempio $s_0 = 1$ e $G(z_3) = 1$ e abbiamo la corrispondenza $s_0 \to z_3$, quindi ogni pixel il cui valore è 1 nell'immagine con istogramma equalizzato si trasformerà in un pixel con valore 3 nell'immagine con l'istogramma specificato.
Continuando con questo procedimento otteniamo:

| $s_k$ | → | $z_q$ |
|---|---|---|
| 1 | → | 3 |
| 3 | → | 4 |
| 5 | → | 5 |
| 6 | → | 6 |
| 7 | → | 7 |

Infine le relazioni di questa tabella vengono utilizzate per trasformare ogni pixel dell'immagine con istogramma equalizzato in un pixel corrispondente nella nuova immagine con l'istogramma specificato. I valori dell'istogramma risultante sono i seguenti:

| **Reale $p_z(z_k)$** |
|---|
| 0.00 |
| 0.00 |
| 0.00 |
| 0.19 |
| 0.25 |
| 0.21 |
| 0.24 |
| 0.11 |

I valori di $p_z(z_k)$ sono stati ottenuti utilizzando lo stesso procedimento dell'esempio precedente dell'equalizzazione. Ad esempio vediamo in tabella che *s=1* si trasforma in *z=3* e ci sono 790 pixel nell'immagine con istogramma equalizzato con il valore di 1, quindi $p_z(z_3)$ = 790/4096 = 0.19.




*(a) istogramma di un'immagine a 3 bit*
*(b) istogramma specificato*
*(c) funzione di trasformazione ottenuta dall'istogramma (b)*
*(d) risultato dell'applicazione della specifica dell'istogramma*

***Elaborazione locale di Istogrammi***

A volte però a noi serve migliorare non tutta l'immagine, ma solo una porzione quindi risulta necessario utilizzare una *elaborazione locale degli istogrammi*, tramite funzioni di trasformazione basate sulla distribuzione dell'intensità nell'intorno di ogni pixel dell'immagine.
In pratica utilizziamo le tecniche viste definendo una zona di prossimità e spostando il suo centro di pixel in pixel. Ad ogni posizione si calcola l'istogramma dei punti nell'intorno per poi applicare una tecnica di manipolazione dell'istogramma (equalizzazione e matching) per trasformare l'intensità del pixel al centro della zona interessata. Tale centro viene poi spostato verso un pixel adiacente e la procedura viene ripetuta.
L'elaborazione locale degli istogrammi serve quando ad esempio abbiamo delle zone dell'immagine che vogliamo migliorare, ma non hanno un contributo significativo da poter influenzare l'equalizzazione globale.

Per migliorare un'immagine abbiamo utilizzato le statistiche dell'istogramma, come la probabilità dei valori di intensità dei pixel.
Ora vediamo la media e la varianza:

- **media**: corrisponde all'intensità media dei pixel nell'immagine e si ottiene con la seguente espressione.

$$m = \sum_{i=0}^{L-1} r_i p(r_i)$$

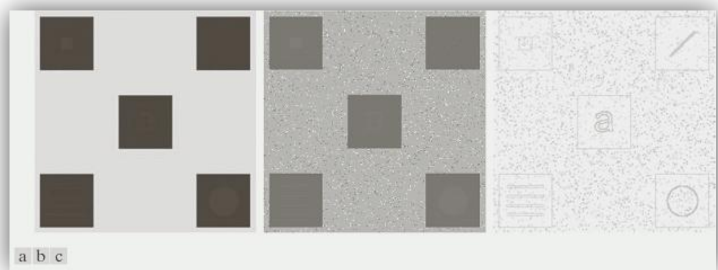
  L'intensità media si può calcolare anche sommando i valori di tutti i pixel e dividendo tale valore per il numero totale di pixel nell'immagine.

- **varianza**: è una misura del contrasto di un'immagine e si ottiene con la seguente espressione.

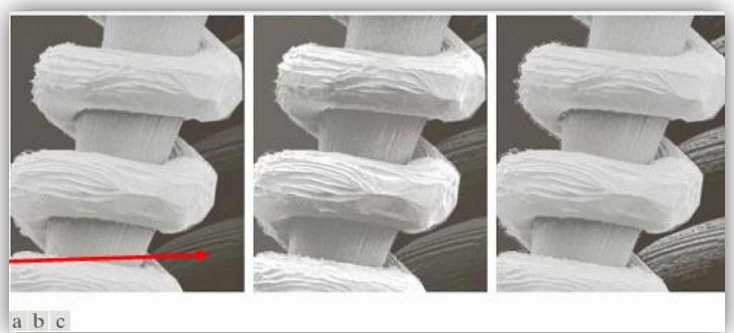
$$\mu_2(r) = \sum_{i=0}^{L-1} (r_i - m)^2 p(r_i)$$

Media e varianza vengono utilizzati per il miglioramento locale dell'immagine, perché provocano dei cambiamenti su ogni singolo pixel della zona.

Quando abbiamo un'immagine che ha delle caratteristiche nascoste, che vogliamo far risaltare, conviene utilizzare il miglioramento locale tramite la manipolazione del contrasto.
Quindi ad esempio quando vogliamo lasciar stare le zone chiare di un'immagine e migliorare le zone scure. Per fare ciò utilizziamo il valore della deviazione standard locale per fare in modo che le zone chiare non vengano modificate mentre le zone scure si. I pixel che soddisfano le condizioni vengono moltiplicati per una costante che aumenta o diminuisce il valore dell'intensità rispetto al resto dell'immagine. Visto che dobbiamo migliorare le zone scure utilizziamo un valore di *E* relativamente basso in modo tale che le zone scure modificate tendano ancora verso l'estremità scura della scala, preservando l'aspetto generale dell'immagine.
In generale la sottoimmagine deve essere il più piccola possibile in modo tale da mantenere i dettagli e ridurre il costo computazionale.
Vediamo due immagini che illustrano i vantaggi dell'elaborazione locale:




*(a) immagine originale*
*(b) risultato dell'equalizzazione globale dell'istogramma*
*(c) risultato dell'equalizzazione locale dell'istogramma applicata ad (a) tramite una regione 3x3*




*(a) immagine originale*
*(b) risultato dell'equalizzazione globale dell'istogramma*
*(c) immagine migliorata utilizzando delle statistiche locali dell'istogramma*

## Elementi di base del filtraggio spaziale

Il **filtraggio spaziale**, che opera nel dominio spaziale descritto precedentemente, può essere lineare e non lineare; nel caso lineare c'è una corrispondenza uno a uno con il filtraggio nel dominio della frequenza, mentre nel caso non lineare non abbiamo una corrispondenza nel dominio della frequenza.
Il *vantaggio* del filtraggio spaziale sta nella sua maggiore versatilità proprio perché permette di utilizzare filtri non lineari. Quando si utilizza un filtro non lineare è necessario specificare le dimensioni dell'intorno sui cui si applicheranno determinate operazioni.

Un **filtro spaziale** consiste in una *regione di prossimità* (solitamente un rettangolo) e un'*operazione predefinita* che viene applicata ai pixel dell'immagine appartenenti alla regione.
Il filtraggio crea un nuovo pixel con le stesse coordinate del centro dell'intorno, il cui valore è il risultato dell'operazione di filtraggio (solitamente è meglio lavorare con filtri di dimensioni dispari in quanto i centri sono valori interi).
Il risultato dell'operazione di filtraggio quindi è un'immagine filtrata creata dalle modifiche indotte dal filtro su ogni pixel dell'immagine di input.
Se l'operazione di filtraggio è lineare allora il filtro viene detto *filtro spaziale lineare.*
In generale il filtraggio spaziale di un'immagine di dimensioni *MxN* con un filtro di dimensioni *mxn* è dato dalla seguente espressione:

$$g(x,y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s,t) f(x+s, y+t)$$

dove *x* e *y* variano in modo tale che ogni pixel di *w* visiti ogni pixel di *f*.

I due concetti principali legati al filtraggio spaziale sono la correlazione e la convoluzione:

- ***correlazione***: processo che consiste nel progressivo scorrimento di una maschera filtro sull'immagine e nel calcolo della somma dei prodotti in ogni posizione.
  *Note*:
  - è una funzione di spostamento del filtro, quindi il primo valore di correlazione corrisponde allo spostamento zero del filtro, il secondo corrisponde allo spostamento di una unità e cosi via.
  - correlare un filtro *w* a una funzione che contiene tutti i valori 0 e un solo valore 1 (chiamata *impulso unitario discreto*) porta a un risultato che è la copia di *w* ruotata di 180°. Quindi la correlazione di una funzione con un impulso unitario discreto porta a una versione ruotata della funzione nella posizione dell'impulso.
  - se l'immagine contiene una regione identicamente uguale a *w*, il valore della funzione di correlazione è massimo quando *w* è centrato su quella regione di *f*.
  La correlazione di un filtro *w(x,y)* di dimensioni *mxn* con un immagine *f(x,y)* è data dalla seguente equazione:

$$w(x,y) \star f(x,y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s,t) f(x+s, y+t)$$

- ***convoluzione***: opera come la correlazione, ma il filtro viene prima ruotato di 180°. In pratica ruotiamo una funzione di 180° e poi applichiamo le stesse operazioni della correlazione, quindi se la maschera filtro è simmetrica il risultato è sempre lo stesso.
  *Note*:
  - la convoluzione di una funzione con l'impulso unitario porta a una copia della funzione nella posizione dell'impulso.
  La convoluzione di un filtro *w(x, y)* di dimensioni *mxn* con un'immagine *f(x,y)* è data dalla seguente equazione:
  $$w(x,y) \star f(x,y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s,t) f(x-s, y-t)$$
  Il ribaltamento e lo scivolamento vengono applicati su *f* anziché su *w* per semplicità.

  In entrambi i casi bisogna applicare del *padding* all'immagine, cioè aggiungere *m-1* righe di valori 0 e *n-1* colonne di valori 0 con un filtro di dimensioni *mxn*.

Il filtraggio lineare possiamo anche rappresentarlo linearmente tramite la seguente equazione:

$$R = w_1 z_1 + w_2 z_2 + w_{mn} z_{mn} = \sum_{k=1}^{mn} w_k z_k = \boldsymbol{w^T z}$$

dove i valori di *w* sono i coefficienti di un filtro *mxn* e i valori di *z* sono le intensità corrispondenti nell'immagine da filtrare.

## Filtri spaziali di Smoothing

I fitri spaziali di smoothing vengono utilizzati per ridurre il rumore e produrre immagini sfocate. Il risultato si può ottenere sia con un filtro lineare sia con un filtro non lineare.

***Filtri lineari di smoothing*** (o *filtri di media, filtri low pass*):
Questi filtri sostituiscono il valore di ogni pixel dell'immagine con la media dei livelli di intensità nella regione definita dalla maschera del filtro. Applicando questo tipo di filtro i risultati ottenuti sono:

- ridurre le transizioni di intensità brusche, spesso dovute alla presenza di rumore.
- sfocare l'immagine, per far emergere oggetti di interesse, però magari perdendo caratteristiche visive importanti.
- eliminare i falsi contorni dovuti all'utilizzo di un numero insufficiente di livelli d'intensità.
- ridurre i dettagli irrilevanti, cioè le regioni di pixel che sono piccole rispetto alle dimensioni della maschera del filtro. Infatti le intensità degli oggetti piccoli tendono a essere inglobate nello sfondo, mentre gli oggetti più grandi diventano macchie facili da individuare.
- introduce dei bordi neri quando si utilizzano delle maschere di grandi dimensioni.

In generale ci sono due tipi di *filtri media*:
*1- filtro box*: filtro di media spaziale in cui tutti i coefficienti sono uguali.

1 1 1
1 1 1
1 1 1

*2- filtro di media ponderata*: filtro che fa in modo che i pixel vengano moltiplicati per coefficienti diversi, dando maggiore peso ad alcuni pixel piuttosto che ad altri.

1 2 1
2 4 2
1 2 1

***Filtri di smoothing non lineari basati sulle statistiche d'ordine:***
La risposta di questi filtri consiste nell'ordinare i pixel contenuti in una zona dell'immagine incorporata dal filtro e poi nella sostituzione del valore del pixel centrale con il valore indotto dalla posizione nell'insieme

ordinato.
Il principale filtro di questo tipo è il *filtro mediano* che sostituisce il valore di un pixel con il valore mediano delle intensità della regione in cui si trova il pixel. I filtri mediani sono molto potenti nel caso sia presente del rumore casuale, in quanto oltre che ridurre molto il rumore introducono una minor sfocatura rispetto ai filtri lineari. Il principale rumore di tipo casuale che viene ridotto dal filtro mediano è il *rumore a impulsi* o *sale e pepe*, per via della presenza di puntini bianchi e neri nell'immagine. Il filtro mediano è efficace contro questo tipo di rumore perché si forzano i pixel a mantenere il proprio livello di intensità simile a quello dell'intorno; quindi gruppi isolati di pixel chiari o scuri rispetto ai loro vicini e la cui area è minore della metà dell'area del filtro vengono completamente eliminati.

### Filtri Spaziali di Sharpening

I filtri spaziali di sharpening rendono più nitida l'immagine mettendo in evidenza le transizioni di intensità e le zone sfocate. Per poter effettuare lo sharpening si sfruttano le caratteristiche delle derivate spaziali di primo e secondo ordine; infatti la risposta di un operatore derivativo è proporzionale al grado di discontinuità dell'intensità dell'immagine nel punto in cui si applica l'operatore, andando quindi ad evidenziare gli edge ed il rumore e mettere in secondo piano le zone con intensità poco variabile o costante.

Le caratteristiche di un operatore che approssima la *derivata prima* sono:

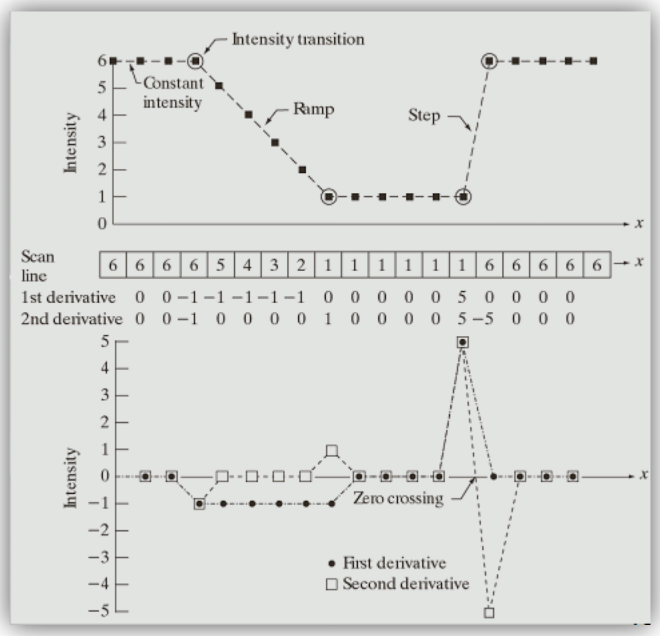
- deve essere 0 nelle aree d'intensità costante
- deve essere diverso da 0 su un gradino o rampa d'intensità
- deve essere diverso da 0 lungo le rampe

Quando si calcola la derivata prima in un punto *x*, si sottrae il valore della funzione in quel punto dal punto successivo, infatti è considerata un'operazione "in avanti".

Le caratteristiche di un operatore che approssima la *derivata seconda* sono:

- deve essere 0 nelle aree d'intensità costante
- deve essere diverso da 0 all'inizio e alla fine di un gradino o rampa d'intensità, inoltre deve cambiare di segno
- deve essere 0 lungo le rampe

Vediamo un'immagine di esempio che illustra le caratteristiche delle due derivate appena elencate:




Nelle immagini digitali i lati sono spesso passaggi d'intensità, simili alle rampe, per cui la derivata prima da

come risultato lati sottili, essendo diversa da zero lungo la rampa. La derivata seconda invece produce un doppio contorno dello spessore di un pixel, separato da zeri, essendo uguale a zero lungo la rampa e diversa da zero all'inizio e alla fine della rampa.
Quindi la derivata seconda è ideale per lo sharpening in quanto risalta meglio i dettagli rispetto alla derivata prima.

***Metodo Laplaciano***
Il **laplaciano** è l'operatore derivativo di secondo ordine isotropico più semplice da utilizzare. *Isotropico* significa che è invariante per rotazione, cioè ruotare l'immagine e poi applicare il filtro da lo stesso risultato di applicare prima il filtro e poi ruotare il risultato. Quindi la risposta di un filtro isotropico è indipendente dalla direzione delle discontinuità dell'immagine a cui è applicato il filtro.

Il laplaciano è definito come:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Siccome le derivate sono operazioni lineari, allora anche il laplaciano è un operatore lineare.
Ma a noi interessano valori discreti e l'equazione laplaciana a valori discreti è la seguente:

$$\nabla^2 f(x,y) = f(x+1,y) + f(x-1,y) + f(x,y+1) + f(x,y-1) - 4f(x,y)$$

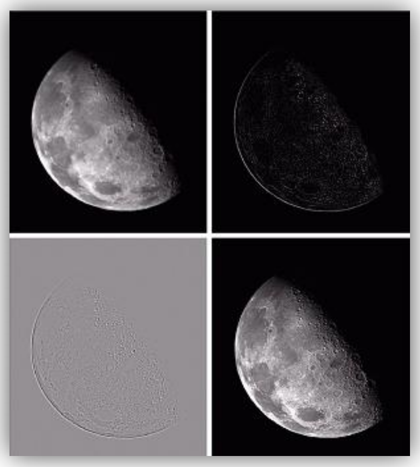
Questa equazione può essere implementata usando la seguente maschera filtro, che dà un risultato isotropico per rotazioni di 90°:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | | 0 | -1 | 0 |
| 1 | -4 | 1 | | -1 | 4 | -1 |
| 0 | 1 | 0 | | 0 | -1 | 0 |

Le direzioni diagonali si ottengono aggiungendo due termini all'equazione, uno per ognuna delle direzioni diagonali.
Le maschere utilizzate per implementare le direzioni diagonali invece sono:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | | -1 | -1 | -1 |
| 1 | -8 | 1 | | -1 | 8 | -1 |
| 1 | 1 | 1 | | -1 | -1 | -1 |

In sintesi il laplaciano, come già indicato sopra, mette in evidenza le discontinuità di intensità (aumenta il contrasto nei punti di discontinuità) di un'immagine e lascia in secondo piano le zone con livelli di intensità costante o poco variabile. Ciò produce immagini con linee grigiastre e altre discontinuità, su uno sfondo scuro ed anonimo. Lo sfondo può essere recuperato sommando (o sottraendo) l'immagine originale all'immagine laplaciana.
Quando si ottiene un immagine laplaciana troppo scura con molto nero è dovuto al fatto che nell'equazione ci sono sia valori positivi sia negativi e tutti i valori negativi sono ridotti a *0* dal display. Per rientrare nella gamma [*0, L-1*] si somma all'immagine laplaciana il suo valore minimo in modo da riportare il minimo a zero. Lo sfondo quindi da nero dovrebbe diventare grigio, per via della riscalatura delle intensità.
Vediamo un esempio:



*(a) immagine lunare*
*(b) immagine laplaciana (infatti contiene valori negativi portati a 0)*
*(c) immagine laplaciana scalata per favorirne la visualizzazione (riportato il minimo a 0)*
*(d) immagine resa più nitida tramite una delle maschere viste sopra*

***Unsharp Masking e filtraggio highboost***
Un'altra tecnica di sharpening dell'immagine è *l'**unsharp masking***, cioè quel processo che consiste nel sottrarre una versione sfocata dell'immagine dall'originale.
I passi da seguire sono i seguenti:

1. sfocare l'immagine originale
2. sottrarre l'immagine sfocata dall'originale (la differenza ottenuta si chiama *maschera*)
3. aggiungere la maschera all'originale

L'equazione che permette di ottenere la maschera quindi è:

$$g_{mask}\,(x, y) = f(x, y) - \bar{f}(x, y)$$

poi aggiungiamo una porzione opportunamente pesata della maschera all'immagine originale:

$$g(x, y) = f(x, y) + k * g_{mask}\,(x, y)$$

quando:
- *k=1* si effettua un operazione di unsharp masking.
- *k>1* si effettua un filtraggio highboost
- *k<1* si riduce il contributo della unsharp mask

Se si utilizza un *k* grande o l'immagine originale ha qualche valore nullo, può capitare di introdurre degli aloni scuri attorno agli edge, dovuto al fatto che il valore grande di *k* porta i picchi della maschera a un livello superiore al valore minimo dell'originale.

***Gradiente***
Le caratteristiche delle derivate prime vengono sfruttate tramite l'utilizzo del gradiente, che permette di effettuare lo sharpening non lineare delle immagini.
Il **gradiente** di *f* alle coordinate (*x, y*) è definito come un vettore colonna bidimensionale ed ha l'importante proprietà geometrica di puntare verso la direzione dove è concentrata la più alta percentuale di variazione di *f* rispetto al punto (*x, y*).

$$\nabla f \equiv grad(f) \equiv \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

La *magnitudo* (lunghezza) del vettore è data da:

$$M(x, y) = mag(\nabla f) = \sqrt{g_x^2 + g_y^2}$$

I calcoli di $g_x$ e $g_y$ sono operazioni lineari perché implicano l'uso di derivate e possono essere implementati come somma di prodotti utilizzando delle particolari maschere spaziali; invece il calcolo di *M(x,y)* implica quadrati e radici quadrate o l'uso di valori assoluti quindi utilizza operazioni non lineari.

Le maschere sopra citate che permettono di calcolare le due componenti del gradiente sono gli **operatori gradiente di Roberts** che hanno la seguente forma:

$$\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

e gli **operatori di Sobel** che hanno la seguente forma:

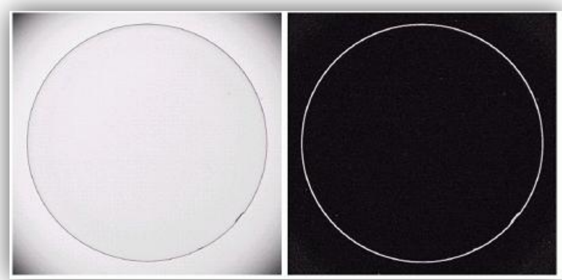
$$\begin{matrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Nella prima la differenza tra la terza e la prima riga approssima la derivata nella direzione *x*. Nella seconda la differenza tra la terza e la prima colonna approssima nella direzione *y*.
Negli operatori di Sobel si utilizza il coefficiente *2* per ottenere dello smoothing che permette di dare maggiore importanza al punto centrale.

Le maschere di dimensione pari sono scomode da usare perché non hanno un centro di simmetria; in tutte le maschere di questo tipo la somma dei coefficienti deve essere 0, perché il nostro scopo è che queste maschere restituiscano 0 nelle zone ad intensità costante.
Riassumendo il gradiente permette di:

- effettuare dello sharpening
- facilitare l'individuazione dei difetti
- facilitare lo sforzo computazionale per eventuali ispezioni automatiche
- evidenziare piccole caratteristiche non facilmente visibili in un'immagine in scala di grigio
- evidenziare piccole discontinuità in aree pressoché piatte

Vediamo un esempio:



*(a) immagine ottica di una lente a contatto*
*(b) gradiente di Sobel*