

## Capitolo 4

# FILTRAGGIO NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

Il filtraggio nel dominio della frequenza è possibile grazie alle caratteristiche della *serie di Fourier* e della *trasformata di Fourier*, che permette di lavorare su una funzione nel dominio di Fourier e, successivamente, ritornare al dominio originale della funzione senza perdere nessuna informazione.

Nel nostro caso utilizziamo solamente la trasformata di Fourier, però facciamo anche qualche accenno alla serie.

La **serie di Fourier** è una somma di seni e coseni moltiplicati per coefficienti appropriati, che esprime una funzione  $f(t)$  di una variabile continua periodica  $t$ , con periodo  $T$ .

La serie di Fourier ha la seguente forma:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$

dove

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt \quad \text{per } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

### **Impulsi e proprietà di sifting**

Un concetto fondamentale collegato alla trasformata di Fourier è quello dell'impulso e delle sue proprietà di sifting. Un impulso unitario di una variabile continua  $f$ , posizionato a  $t=0$  e denotato da  $\delta(t)$  è definito come:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{se } t = 0 \\ 0 & \text{se } t \neq 0 \end{cases}$$

E deve soddisfare l'identità:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Quindi un impulso può essere visto come un picco di ampiezza infinita e durata nulla, avente una superficie unitaria.

La proprietà di sifting, citata prima, fornisce il valore della funzione  $f(t)$  nella posizione dell'impulso  $t_0$ , quindi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

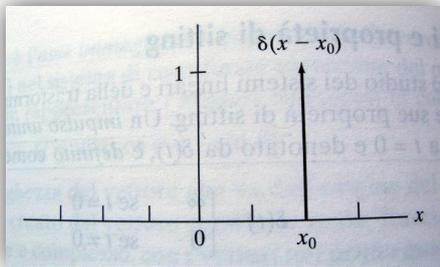
Le proprietà viste finora si riferiscono al continuo, ma noi, trattando immagini digitali, abbiamo a che fare con quantità discrete quindi le formule viste prima per poter descrivere un *singolo impulso discreto*  $\delta(x)$  diventano:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \delta(x) = 1$$

La proprietà di sifting diventa:

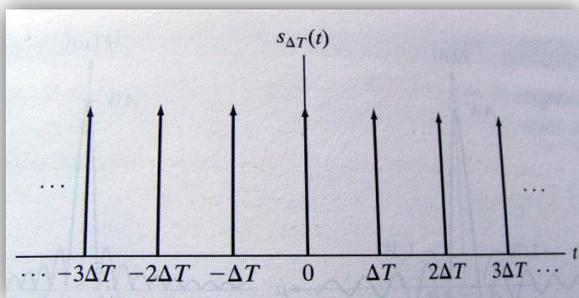
$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0)$$



Un singolo impulso discreto posizionato in  $x = x_0$ . La variabile  $x$  è discreta, e  $\delta$  è 0 in qualsiasi posizione, ad eccezione che in  $x = x_0$

Un treno di impulsi è la somma di infiniti impulsi periodici  $\Delta T$  unitari e separati:

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T)$$



Treno di impulsi

### Trasformata di Fourier di una variabile continua

La trasformata di Fourier di una funzione continua  $f(t)$  di una variabile continua  $t$  è definita dalla seguente equazione:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt$$

La trasformata può essere indicata con  $F(\mu)$  perché è una funzione della sola variabile  $\mu$ , anch'essa continua, infatti  $t$  è la variabile di integrazione.

L'antitrasformata di Fourier (o trasformata inversa) permette di risalire a  $f(t)$  data  $F(\mu)$ , in questo modo:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu) e^{-j2\pi\mu t} d\mu$$

Le due equazioni che abbiamo appena visto individuano la coppia di Fourier.

L'equazione della trasformata di Fourier, grazie alla formula di Eulero, può essere riscritta nel seguente modo:

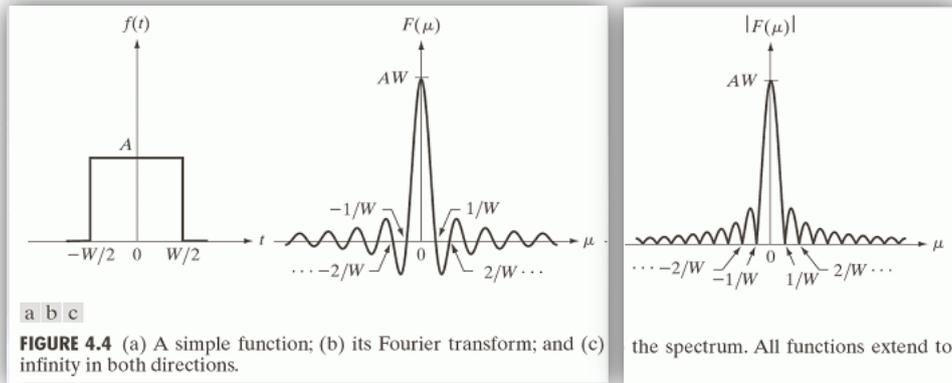
$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos(2\pi\mu t) - j\sin(2\pi\mu t)] dt$$

Dopo l'integrazione l'unica variabile rimasta è la frequenza, per questo motivo il dominio della trasformata di Fourier viene chiamato *dominio della frequenza*.

Il problema della trasformata di Fourier è che solitamente contiene termini complessi e, per agevolare la visualizzazione, si lavora con la magnitudo della trasformata (cioè una quantità reale), chiamata *spettro di Fourier* (o spettro della frequenza):

$$|F(\mu)| = AT \left| \frac{\sin(\pi\mu W)}{\pi\mu W} \right|$$

L'immagine illustra le caratteristiche dei concetti illustrati finora:



Notiamo che la funzione tende a infinito sia per i valori positivi sia per quelli negativi di  $\mu$ . Le posizioni degli zeri di entrambe le funzioni (trasformata e spettro) sono inversamente proporzionali alla larghezza  $W$ , la cui altezza dei lobi decresce in funzione della distanza dall'origine.

#### Trasformata di Fourier di un impulso e di un treno di impulsi

La trasformata di Fourier di un impulso posizionato nell'origine del dominio spaziale diventa una costante nel dominio della frequenza. Se invece l'impulso è posizionato in  $t = t_0$  allora diventa:

$$F(\mu) = e^{-j2\pi\mu t_0} = \cos(2\pi\mu t_0) - j\sin(2\pi\mu t_0)$$

Il treno di impulsi  $s_{\Delta T}(t)$ , periodico con periodo  $\Delta T$ , invece può essere espresso come una serie di Fourier:

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}$$

dove:

$$c_n = \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} s_{\Delta T}(t) e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t} dt$$

L'integrale nell'intervallo  $[-\Delta T/2, \Delta T/2]$ , comprende solo l'impulso di  $s_{\Delta T}(t)$ , collocato nell'origine.

La somma è un processo lineare, quindi la trasformata di Fourier di una somma è uguale alla somma delle trasformate delle singole componenti, cioè degli esponenziali.

Da notare infine che la trasformata di Fourier di un treno di impulsi, con periodo  $\Delta T$ , è a sua volta un treno di impulsi.

#### **Convoluzione**

Come abbiamo visto nel capitolo 3, la convoluzione di due funzioni prevede il flipping (rotazione di 180°) di una funzione rispetto all'origine e il suo scorrimento sull'altra, durante il quale si effettua un calcolo.

La convoluzione di due funzioni continue  $f(t)$  e  $h(t)$ , di una variabile continua  $t$ , è definita:

$$f(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

dove il segno *meno* serve per il flipping descritto prima;  $t$  è lo spostamento necessario per lo scorrimento di una funzione sull'altra;  $\tau$  è la variabile d'integrazione.

La trasformata di Fourier della convoluzione risulta essere:

$$\mathcal{F}\{f(t) \star h(t)\} = H(\mu)F(\mu)$$

dove  $f(t)$  e  $h(t)$  possono essere invertite, quindi la convoluzione gode della proprietà commutativa.

In dettaglio, se  $t$  indica il dominio spaziale e  $\mu$  il dominio della frequenza, la trasformata di Fourier della convoluzione di due funzioni nel dominio spaziale è uguale al prodotto delle due funzioni nel dominio della frequenza della trasformata di Fourier delle due funzioni.

Viceversa, dal prodotto di due trasformate otteniamo la convoluzione nel dominio spaziale calcolando l'antitrasformata di Fourier.

Quindi  $f(t) \star h(t)$  e  $H(\mu)F(\mu)$  sono una coppia di Fourier.

Ora abbiamo tutti gli elementi per esporre le due parti del *teorema della convoluzione*, che è la base del filtraggio nel dominio della frequenza:

Prima parte:

$$\mathcal{F}\{f(t) \star h(t)\} \Leftrightarrow H(\mu)F(\mu)$$

Questa prima parte indica che l'espressione di destra si ottiene attraverso la trasformata di Fourier dell'espressione di sinistra, mentre l'espressione di sinistra si ottiene attraverso l'*inverso* della trasformata di Fourier dell'espressione di destra.

Seconda parte:

$$\mathcal{F}\{f(t)h(t)\} \Leftrightarrow H(\mu) \star F(\mu)$$

Questa seconda parte indica che la convoluzione nel dominio della frequenza è analoga alla moltiplicazione nel dominio spaziale, e che sono relazionate, rispettivamente, dalla trasformata di Fourier e dalla sua inversa.

## Campionamento e trasformata di Fourier di funzioni campionate

### Campionamento

Come già visto nel capitolo 3, per poter elaborare le immagini al computer è necessario trasformare le funzioni continue in una sequenza di valori discreti, tramite i processi di campionamento e quantizzazione.

Il campionamento è modellato moltiplicando  $f(t)$  per una funzione di campionamento uguale al treno di impulsi  $\Delta T$  unitari e separati:

$$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)$$

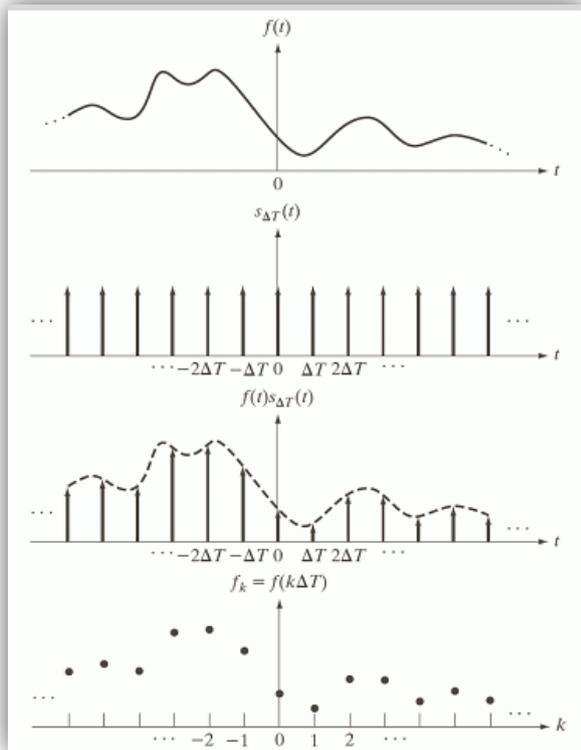
dove  $\tilde{f}(t)$  è la funzione campionata.

Ciascun componente della sommatoria è un impulso pesato al quale viene assegnato il valore assunto da  $f(t)$  nella posizione dell'impulso stesso. Il *valore* di ciascun campione è dato dalla forza dell'impulso pesato ottenuto dall'integrazione. Il valore di  $f_k$  di un campione arbitrario nella sequenza è dato da:

$$f_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - k\Delta T)dt = f(k\Delta T)$$

dove  $k$  può essere qualsiasi valore intero.

Vediamo un'immagine che rappresenta i concetti illustrati finora sul campionamento.



- (a) Una funzione continua
- (b) Treno di impulsi utilizzato per modellare il processo di campionamento
- (c) Funzione campionata formata dal prodotto di (a) e (b)
- (d) Valori campione ottenuti dall'integrazione e dall'utilizzo della proprietà di sifting dell'impulso.

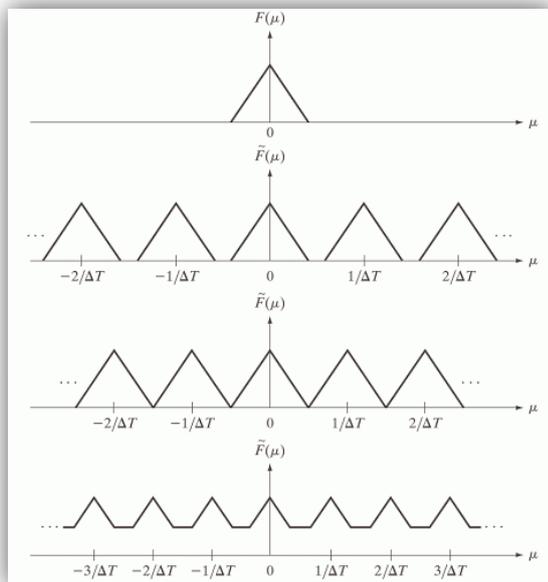
### La trasformata di Fourier di funzioni campionate

La trasformata di Fourier  $\tilde{F}(\mu)$  della funzione campionata  $\tilde{f}(t)$  è una sequenza *infinita e periodica* di copie di  $F(\mu)$ , la trasformata della funzione continua originale, quindi la trasformata della funzione campionata è *continua*.

La distanza tra le copie è determinata dal valore di  $1/\Delta T$  e la quantità di  $1/\Delta T$  è la *frequenza di campionamento* usata per generare le funzioni campionate. In base alla frequenza di campionamento possiamo avere:

- *sovra-campionamento*: la frequenza è abbastanza alta da permettere un sufficiente distacco tra i vari periodi.
- *campionamento critico*: la frequenza è alta abbastanza ma al limite, infatti un valore ancora più basso di  $1/\Delta T$  causerebbe una fusione dei periodi, mentre un valore più alto fornirebbe un maggiore distacco tra i periodi.
- *sottocampionamento*: la frequenza è più bassa del minimo richiesto, non riuscendo a mantenere distinte e separate le copie di  $F(\mu)$ .

Vediamo un'immagine che riassume i concetti appena illustrati:



- (a) trasformata di Fourier di una funzione a banda limitata
- (b) trasformata della funzione (a) che rappresenta le condizioni di sovra-campionamento
- (c) trasformata che rappresenta le condizioni di campionamento critico
- (d) trasformata che rappresenta le condizioni di sottocampionamento

### Il teorema del campionamento

Una *funzione a banda limitata* (come quella della figura precedente) è una funzione  $f(t)$  la cui trasformata è zero per i valori in frequenza esterni a un intervallo finito  $[-\mu_{max}, \mu_{min}]$ .

Dai concetti illustrati prima sulla frequenza di campionamento emerge che è necessario avere un periodo completo che caratterizzi l'intera trasformata, in modo da poter recuperare  $f(t)$  da quel singolo periodo facendo uso dell'antitrasformata di Fourier.

E' possibile estrarre da  $\tilde{F}(\mu)$  un singolo periodo uguale a quello di  $F(\mu)$ , se la separazione tra le varie copie è sufficiente. Il distacco sufficiente è garantito se

$$\frac{1}{\Delta T} > 2\mu_{max}$$

Quindi una funzione continua a banda limitata può essere completamente ricostruita a partire dall'insieme dei suoi campioni (nessuna informazione è completamente persa), se questi ultimi sono stati acquisiti con un valore superiore al doppio della frequenza più alta della funzione; un tasso di campionamento *esattamente* uguale al doppio della frequenza più alta è chiamato *frequenza di Nyquist*. Di conseguenza la *frequenza massima* che può essere catturata campionando un segnale a  $1/\Delta T$  è  $\mu_{max} = 1/2\Delta T$ .

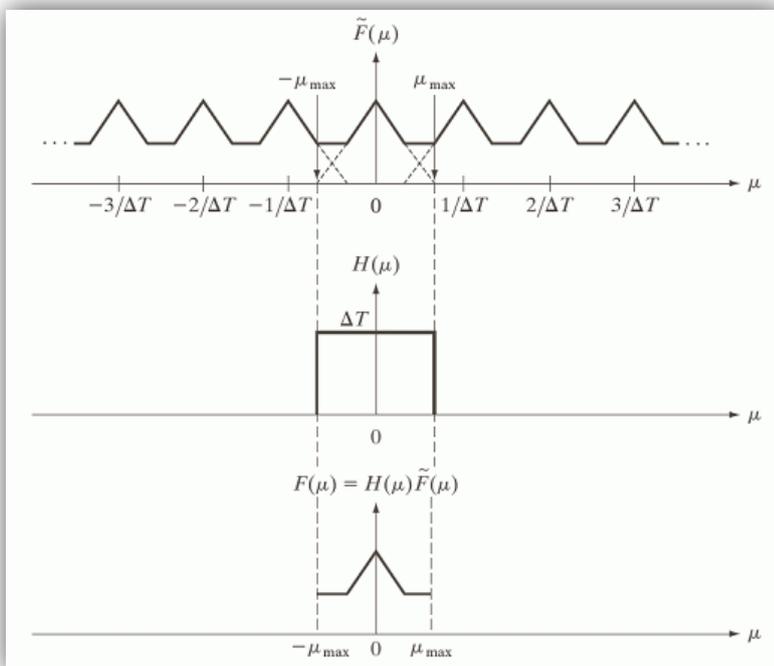
Il risultato ottenuto è il teorema del campionamento. I filtri che permettono di ricostruire la funzione originale a partire dai campioni vengono chiamati *filtri di ricostruzione*.

### Aliasing

L'aliasing (o aliasing della frequenza) è il processo in cui le componenti ad alta frequenza di una funzione continua, si mascherano alle frequenze più basse nella funzione campionata. La conseguenza di questo processo è che l'antitrasformata introduce degli errori nell'immagine.

Come abbiamo visto prima il sottocampionamento, quindi l'abbassamento del tasso di campionamento sotto quello di Nyquist, provoca la sovrapposizione dei periodi e diventa impossibile isolare un singolo periodo della trasformata, a prescindere dal filtro utilizzato. Infatti anche utilizzando un filtro low pass otterremmo una funzione sporcata dalle frequenze dei periodi adiacenti.

L'immagine seguente rappresenta proprio questo aspetto.



(a) Trasformata di Fourier di una funzione a banda limitata e sotto campionata

(b) Filtro ideale low-pass

(c) Prodotto di (a) e (b).

L'interferenza dei periodi adiacenti fa sì che l'aliasing impedisca il perfetto recupero di  $F(\mu)$ , e, di conseguenza, della funzione continua a banda limitata originale.

Nei segnali campionati l'aliasing è sempre presente perché, sebbene la funzione campionata originale sia a banda limitata, le componenti infinite in frequenza vengono introdotte quando si limita l'estensione della funzione, procedura indispensabile nella pratica.

Nella pratica gli effetti di aliasing possono essere *ridotti* dallo smoothing delle funzioni di input, che ne attenua le frequenze più alte. Questo processo chiamato *anti-aliasing* deve essere effettuato prima che la

funzione venga campionata, perché l'aliasing è una fase del campionamento che non può essere "eliminato dopo".

Una funzione ricostruita perfettamente è una somma infinita di funzioni sinc pesate dai valori dei campioni, e possiede la proprietà secondo la quale la funzione ricostruita equivale ai valori dei campioni negli incrementi multipli e interi di  $\Delta T$ .

### Trasformata discreta di Fourier (DFT) a una variabile

Per calcolare le DFT serve campionare un solo periodo.

Dato un insieme  $\{f_n\}$  avente M campioni di  $f(t)$ , tramite la seguente equazione:

$$F_m = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi mn/M} \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

è possibile ottenere un insieme di campioni  $\{F_m\}$  di valori complessi discreti che corrispondono alla trasformata discreta di Fourier dell'insieme dei campioni di input.

Al contrario dato un insieme  $\{F_m\}$  possiamo ricostruire l'insieme dei campioni  $\{f_n\}$  utilizzando l'*antitrasformata discreta di Fourier (IDFT)*, utilizzando la seguente equazione:

$$f_n = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} F_m e^{j2\pi mn/M} \quad n = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

La coppia della DFT può essere applicata a *qualsiasi* insieme finito di campioni discreti presi uniformemente.

Infine notiamo che la trasformata discreta di Fourier e la sua inversa sono infinitamente periodiche, con periodo M.

La risoluzione in frequenza  $\Delta u$  della DFT dipende dalla durata di  $T$ , dove la funzione continua  $f(t)$  è campionata, e l'intervallo delle frequenze attraversato dalla DFT dipende dall'intervallo di campionamento  $\Delta T$ .

### Estensione alle funzioni a due variabili

Ora estendiamo i concetti visti finora a due variabili.

#### Impulso 2-D e la sua proprietà di sifting

L'impulso  $\delta(t, z)$  di due variabili continue,  $t$  e  $z$ , è definito

$$\delta(t, z) = \begin{cases} \infty & \text{se } t = z = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

L'impulso 2-D soddisfa, come nel caso 1-D, la proprietà di sifting per un impulso con coordinate  $(t_0, z_0)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) \delta(t - t_0, z - z_0) dt dz = f(t_0, z_0)$$

Ricordiamo che la proprietà di sifting fornisce il valore della funzione  $f(t, z)$  nella posizione dell'impulso.

Ora vediamo le proprietà illustrate sopra applicate nel discreto: l'impulso discreto 2-D, per le variabili discrete  $x$  e  $y$ , è definito

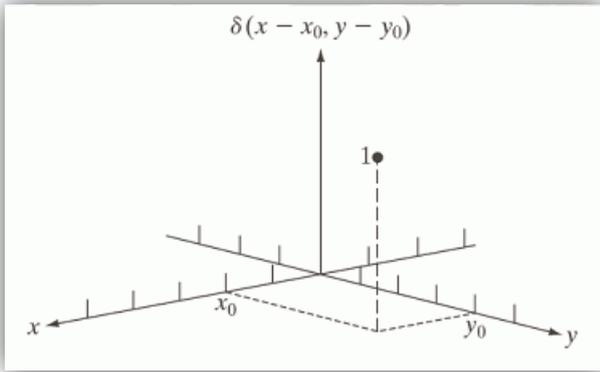
$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = y = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La proprietà di sifting diventa, per un impulso con coordinate  $(x_0, y_0)$ :

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x - x_0, y - y_0) = f(x_0, y_0)$$

Come al solito, la proprietà di sifting di un impulso discreto ha come risultato il valore della funzione discreta  $f(x, y)$  nella posizione dell'impulso.

Vediamo un impulso discreto 2-D con un'immagine:



Impulso discreto unitario e bidimensionale. Le variabili  $x$  e  $y$  sono discrete e  $\delta$  vale sempre 0, ad eccezione del punto di coordinate  $(x_0, y_0)$

### Coppia di Fourier continua 2-D

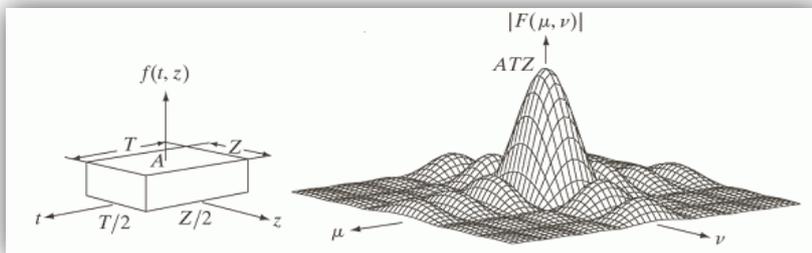
La coppia di Fourier continua e bidimensionale, con  $f(t, z)$  funzione continua di due variabili continue  $t$  e  $x$ , è data dalle seguenti espressioni:

$$F(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) e^{-j2\pi(\mu t + \nu z)} dt dz$$

e

$$f(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu, \nu) e^{j2\pi(\mu t + \nu z)} d\mu d\nu$$

dove  $\mu$  e  $\nu$  sono le variabili in frequenza e il loro dominio viene definito *dominio continuo della frequenza*. Vediamo un esempio di funzione bidimensionale e del suo spettro:



- (a) Funzione bidimensionale
- (b) Sezione del suo spettro

Il blocco è più lungo rispetto all'asse  $t$ , così lo spettro sarà più contratto lungo l'asse delle  $\mu$

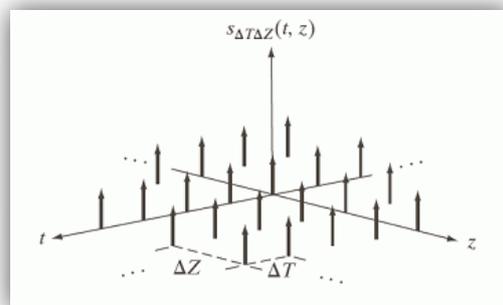
Le posizioni degli zeri nello spettro sono inversamente proporzionali ai valori di  $T$  e  $Z$ , quindi  $T$  e  $Z$  saranno più grandi quando lo spettro si contrae, e viceversa.

### Campionamento bidimensionale e teorema del campionamento 2-D

Il campionamento bidimensionale può essere modellato utilizzando la funzione di campionamento (*treno di impulsi 2-D*)

$$s_{\Delta T \Delta Z}(t, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - m\Delta T, z - n\Delta Z)$$

dove  $\Delta T$  e  $\Delta Z$  sono le distanze tra i campioni lungo l'asse delle  $t$  e delle  $z$  della funzione continua  $f(t, z)$ . Questa equazione descrive un insieme di impulsi periodici che si estendono all'infinito lungo i due assi. Vediamo un esempio tramite un'immagine:



La funzione  $f(t, z)$  viene detta a banda limitata se la sua trasformata di Fourier è 0 al di fuori del rettangolo individuato dagli intervalli  $[-\mu_{max}, \mu_{max}]$  e  $[-v_{max}, v_{max}]$ .

Il *teorema del campionamento bidimensionale* stabilisce che una funzione continua, a banda limitata,  $f(t, z)$  può essere ricostruita senza errori da un insieme dei suoi campioni se gli intervalli di campionamento sono:

$$\Delta T < \frac{1}{2\mu_{max}} \quad \text{e} \quad \Delta Z < \frac{1}{2v_{max}}$$

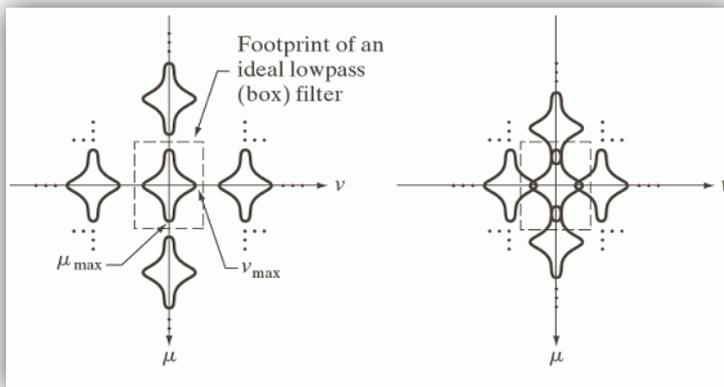
Ovviamente girando le frazioni e parlando in termini di tasso di campionamento abbiamo:

$$\frac{1}{\Delta T} > 2\mu_{max} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\Delta Z} > 2v_{max}$$

Quindi non si perde nessuna informazione se una funzione continua, a banda limitata e bidimensionale è rappresentata da campioni acquisiti a valori due volte più grandi della massima frequenza della funzione, in entrambe le direzioni  $\mu$  e  $v$ .

Insomma tutti i concetti visti per il caso unidimensionale si ripetono nel bidimensionale, infatti se la funzione è sotto campionata i periodi si sovrappongono e diventa impossibile isolare un singolo periodo, provocando il fenomeno dell'aliasing.

Una possibile rappresentazione grafica del caso bidimensionale è la seguente:



(a) Trasformata di Fourier sovracampionata  
(b) Trasformata di Fourier sottocampionata

## Aliasing nelle immagini

### Estensione dall'aliasing 1-D

Come abbiamo visto nel caso unidimensionale, una funzione continua  $f(t, z)$  di due variabili continue  $t$  e  $z$ , può essere a banda limitata solo se si estende infinitamente in entrambe le coordinate spaziali. L'aliasing è sempre presente in quanto non è possibile campionare una funzione infinita e limitare la durata della funzione introduce delle componenti distorte in frequenza.

Ci sono due tipi di manifestazioni dell'aliasing nelle immagini:

- **aliasing spaziale:** dovuto al sottocampionamento. Si presenta sotto forma di artefatti come linee frastagliate, rilievi spuri e presenza di strutture (pattern) in frequenza non presenti nell'immagine originale.
- **aliasing temporale:** legato agli intervalli temporali tra le immagini in una sequenza. Un esempio è l'effetto *wagon wheel* (ruota del vagone), nel quale in una sequenza di immagini, le ruote con i raggi sembrano ruotare indietro; la causa è il valore del frame rate (immagini al secondo) troppo basso rispetto alla velocità di rotazione delle ruote nella sequenza.

Esattamente come nel caso unidimensionale gli effetti dell'aliasing possono essere ridotti tramite smoothing in modo da attenuare le frequenze più alte; ricordiamo che il filtraggio anti-aliasing deve essere applicato prima che l'immagine venga campionata, in quanto non esistono software in grado di applicare filtri anti-aliasing dopo il campionamento per ridurre gli artefatti indotti dalle violazioni del teorema del campionamento.

### Interpolazione di un'immagine e ricampionamento

La ricostruzione perfetta di una funzione a banda limitata di un'immagine a partire da un insieme dei suoi campioni, richiede una convoluzione bidimensionale nel dominio spaziale con una funzione sinc, quindi richiede un'interpolazione che utilizza infinite sommatorie, obbligandoci a procedere per approssimazioni. Come abbiamo già visto precedentemente l'interpolazione viene utilizzata per il ridimensionamento di un'immagine: l'ingrandimento può essere visto come un caso di sovracampionamento (ad esempio lo zooming effettuato mediante la *replicazione dei pixel*, applicabile quando si vuole aumentare la dimensione dell'immagine di un numero intero di volte); il rimpicciolimento come un caso di sottocampionamento, che si ottiene cancellando opportunamente righe e colonne.

Per ridurre il fenomeno dell'aliasing possiamo utilizzare due metodi:

- *sfocare* leggermente l'immagine prima di rimpicciolirla
- *sovracampionare* (utilizzare una risoluzione maggiore) la scena originale e ridurre (ricampionando) le sue dimensioni attraverso la cancellazione di righe e colonne. Ovviamente con questa tecnica è necessario avere accesso alla scena originale.

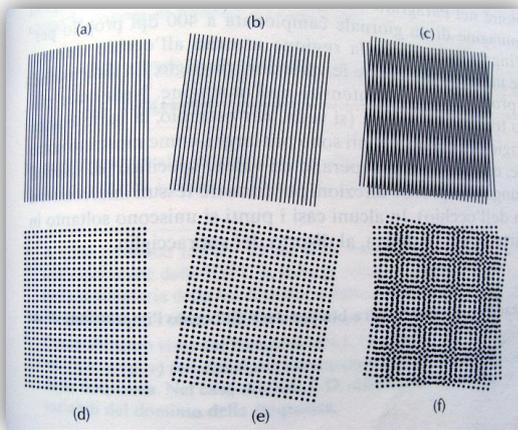
Quando abbiamo a che fare con immagini che hanno dei contorni ben definiti, gli effetti dell'aliasing appaiono come blocchi chiamati *jaggy*.

### Effetto moiré

Questo tipo di artefatto è visibile nel campionamento di scene con componenti periodiche o quasi. Nell'ottica questo effetto si riferisce alle strutture periodiche prodotte tra due griglie sovrapposte aventi, approssimativamente, un'uguale distanza.

Nell'elaborazione delle immagini questo problema compare nella scansione di stampe multimediali, come i giornali e le riviste, o nelle immagini con componenti periodiche la cui distanza è confrontabile con lo spazio di separazione tra i campioni.

Vediamo un esempio chiarificatore:



*individualmente le singole componenti sono chiare e prive di interferenze, ma la sovrapposizione di un disegno sull'altro crea una struttura periodica delle frequenze completamente assenti nelle strutture originali*

*Le immagini (a) e (b) sono delle linee verticali, ma siccome l'immagine è stata importata dalla digitale si sono creati proprio gli artefatti che stiamo descrivendo.*

I giornali e gli altri supporti stampati fanno uso dei cosiddetti *punti a mezzotono (halftone)*, che sono punti o ellissi neri le cui dimensioni variano a seconda degli schemi utilizzati per simulare i toni di grigio. Importante ricordare che la dimensione del punto è inversamente proporzionale all'intensità dell'immagine; nelle aree chiare infatti i punti sono piccoli o totalmente assenti, nelle aree grigie non troppo scure i punti sono larghi.

Solitamente i giornali sono stampati utilizzando 75 dpi (*dots per inch*), le riviste utilizzano 133 dpi e le brochure ad alta qualità 175 dpi.

Il reticolo di campionamento, orientato orizzontalmente e verticalmente, e i modelli dei punti sull'immagine del giornale, orientati a  $\pm 45^\circ$ , creano strutture uniformi di moiré che rendono l'immagine come se fosse macchiata.

### La trasformata discreta di Fourier 2-D (DFT) e la sua inversa (IDFT)

La trasformata discreta di Fourier 2-D si ottiene con la seguente espressione

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

dove  $f(x, y)$  è un'immagine digitale di dimensioni  $M \times N$ ; i valori delle variabili  $u$  e  $v$  devono appartenere al range  $u = 0, 1, 2, \dots, M - 1$  e  $v = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ .

L'antitrasformata discreta di Fourier ci permette di ottenere  $f(x, y)$  data  $F(u, v)$ :

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

dove  $x = 0, 1, 2, \dots, M - 1$  e  $y = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ .

Ovviamente queste due equazioni costituiscono la *coppia di Fourier discreta 2-D*.

### Alcune proprietà della trasformata discreta di Fourier 2-D

#### Relazione tra gli intervalli spaziali e gli intervalli della frequenza

Esistono relazioni fondamentali tra gli intervalli del campionamento spaziale e i corrispondenti intervalli nel dominio della frequenza. Se una funzione continua  $f(t, z)$  viene campionata per formare un'immagine digitale  $f(x, y)$ , formata da  $M \times N$  campioni presi rispettivamente nell'asse  $t$  e nell'asse  $z$ . Se  $\Delta T$  e  $\Delta Z$  denotano le distanze tra i campioni, le distanze tra le corrispondenti variabili discrete del dominio della frequenza si ottengono da:

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta T}$$

e

$$\Delta v = \frac{1}{N\Delta Z}$$

Notiamo che le distanze tra i campioni nel dominio della frequenza sono inversamente proporzionali sia alla distanza tra i campioni spaziali che al numero dei campioni stessi.

#### Traslazione e rotazione

La coppia di Fourier vista prima soddisfa le seguenti proprietà di traslazione:

$$f(x, y) e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$$

e

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) e^{-j2\pi(x_0u/M+y_0v/N)}$$

Cioè moltiplicando  $f(x, y)$  per l'esponenziale mostrato si trasla l'origine della DFT in  $(u_0, v_0)$  e, viceversa, moltiplicando  $F(u, v)$  per il negativo dello stesso esponente si trasla l'origine della  $f(x, y)$  in  $(x_0, y_0)$ .

La traslazione non ha effetti sulla *magnitudo* (spettro) di  $F(u, v)$ .

Utilizzando le coordinate polari

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad u = \omega \cos \varphi \quad v = \omega \sin \varphi$$

la coppia di Fourier diventa:

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$$

per cui ruotando  $f(x, y)$  di un angolo  $\theta_0$  anche  $F(u, v)$  viene ruotato dello stesso angolo. Viceversa ruotando  $F(u, v)$  anche  $f(x, y)$  ruota in maniera analoga.

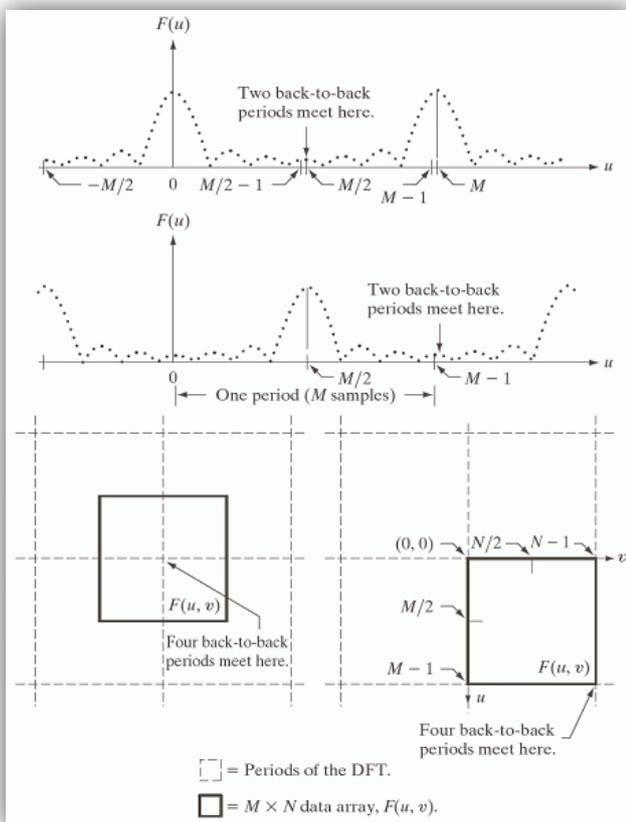
### Periodicità

Le periodicità della trasformata e della sua inversa sono aspetti fondamentali per l'implementazione degli algoritmi basati sulla DFT.

I dati della trasformata nell'intervallo tra 0 e  $M-1$  consistono in due mezzi periodi invertiti che si incontrano nel punto  $M/2$ . Per la visualizzazione e il filtraggio è più conveniente avere in questo intervallo un periodo completo della trasformata, nella quale i dati sono contigui; per fare in modo che  $F(0)$  sia al centro dell'intervallo  $[0, M-1]$  si moltiplica  $f(x)$  per  $(-1)^x$ .

Nel caso bidimensionale il principio rimane lo stesso, anche se al posto dei due mezzi periodi avremo quattro periodi da  $1/4$  che si incontrano nel punto  $(M/2, N/2)$ . Come nel caso monodimensionale, la visualizzazione è semplificata se si traslano i dati in maniera tale che  $F(0, 0)$  sia in  $(M/2, N/2)$ ; per fare in modo che  $F(0, 0)$  risulti al centro del rettangolo della frequenza, definito dall'intervallo  $[0, M-1]$  e  $[0, N-1]$  si moltiplica  $f(x, y)$  per  $(-1)^{x+y}$ .

Vediamo un'immagine che illustra il riposizionamento della trasformata di Fourier al centro:



- (a) DFT 1-D con un numero infinito di periodi
- (b) DFT spostata, ottenuta dalla moltiplicazione di  $f(x)$  per  $(-1)^x$  prima di calcolare  $F(u)$
- (c) DFT 2-D con un numero infinito di periodi. L'area racchiusa dalla linea scura continua è una matrice di valori  $M \times N$ ,  $F(u, v)$
- (d) DFT ottenuta dalla moltiplicazione di  $f(x, y)$  per  $(-1)^{x+y}$ , prima di calcolare  $F(u, v)$ . I dati adesso contengono un periodo completo e centrato, come in (b)

### Proprietà di simmetria

Ogni funzione reale o complessa  $w(x, y)$  può essere espressa come la somma di una parte pari e di una parte dispari (ciascuna delle quali può essere reale o complessa):

$$w(x, y) = w_e(x, y) + w_o(x, y)$$

dove, per via della definizione della parte pari e della parte dispari, abbiamo

$$w_e(x, y) = w_e(-x, -y)$$

e

$$w_o(x, y) = -w_o(-x, -y)$$

Infatti le funzioni pari vengono dette *simmetriche*, mentre le funzioni dispari *antisimmetriche*. Dal momento che tutti gli indici nella DFT e nella IDFT sono positivi, quando parliamo di simmetria (e di antisimmetria) ci riferiamo alla simmetria (o antisimmetria) rispetto al *punto centrale* di una sequenza. La trasformata di Fourier di una funzione *reale*  $f(x, y)$  gode della proprietà di *simmetria coniugata*:

$$F^*(u, v) = F(-u, -v)$$

Invece la trasformata di Fourier di una funzione *immaginaria*  $f(x, y)$  sarà *antisimmetrica coniugata*:

$$F^*(u, v) = -F(u, v)$$

### **Spettro di Fourier e angolo di fase**

La DFT 2-D è solitamente complessa, quindi può essere espressa in forma polare

$$F(u, v) = |F(u, v)|e^{j\phi(u, v)}$$

dove

- *magnitudo* (spettro o frequenza di Fourier):

$$|F(u, v)| = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}$$

- *angolo di fase*:

$$\phi(u, v) = \arctan \left[ \frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$$

- *spettro di potenza*:

$$P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$$

$R$  e  $I$  sono, rispettivamente, le parti reale e immaginaria di  $F(u, v)$  e tutti i calcoli sono eseguiti per le variabili discrete  $u = 0, 1, 2, \dots, M - 1$  e  $v = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ . Quindi magnitudo, spettro e angolo sono matrici di dimensioni  $M \times N$ .

Prima abbiamo detto che la trasformata di Fourier di una funzione reale è simmetrica coniugata, quindi lo spettro ha una simmetria *pari* rispetto all'origine:

$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)|$$

e l'angolo di fase possiede la seguente simmetria dispari rispetto all'origine:

$$\phi(u, v) = -\phi(-u, -v)$$

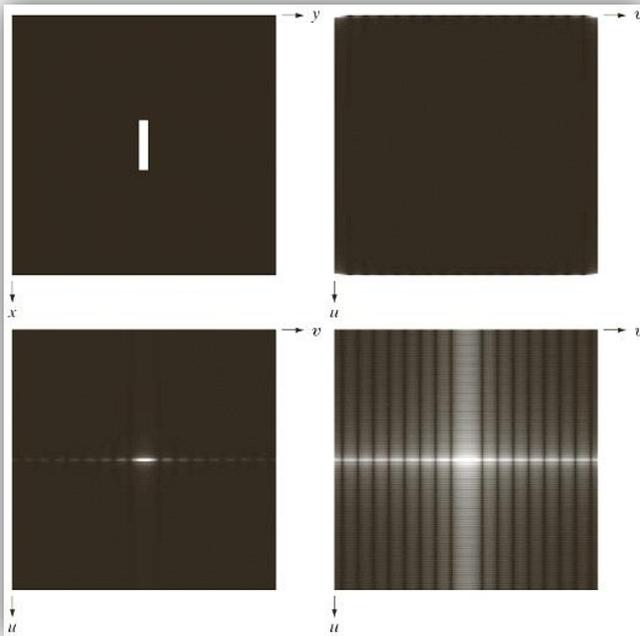
Dall'equazione della trasformata discreta di Fourier 2-D segue che:

$$F(0, 0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

il quale indica che il termine della frequenza zero è proporzionale al valore medio di  $f(x, y)$ .

Poiché i componenti in frequenza  $u$  e  $v$  valgono zero nell'origine,  $F(0, 0)$  viene chiamato anche *componente dc* della trasformata.

Vediamo un bell'esempio che illustra i concetti visti finora.

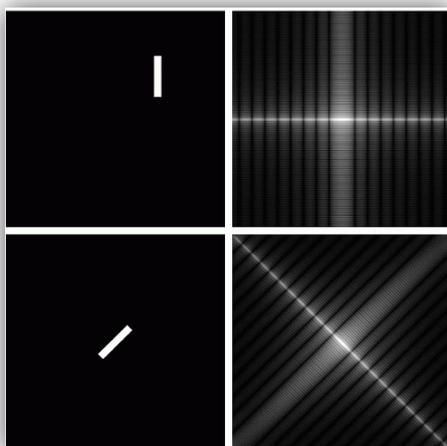


- (a) Immagine
- (b) Spettro che mostra dei punti luminosi nei quattro angoli
- (c) Spettro centrato
- (d) Maggiori dettagli ottenuti grazie ad una trasformazione logaritmica. I passaggi dello zero crossing dello spettro sono più vicini lungo la verticale poiché il rettangolo in (a) è più lungo in quella direzione

Dall'immagine notiamo che:

- le origini di entrambi i domini, spaziale e della frequenza, sono in alto a sinistra.
- L'area attorno all'origine della trasformata contiene i valori più alti, in ogni caso i quattro angoli dello spettro contengono valori alti.
- Per centrare lo spettro, moltiplichiamo l'immagine in (a) per  $(-1)^{x+y}$ , prima di calcolare la DFT. Questa operazione viene fatta per avere un risultato più facile da visualizzare.
- Siccome il termine *dc* domina i valori dello spettro, il range dinamico delle altre intensità nell'immagine sono compresse. Per recuperare questi dettagli utilizziamo una trasformazione logaritmica  $(1 + \log|F(u, v)|)$ .

Ora vediamo come lo spettro si comporta nel caso di *traslazione* e *rotazione*:



- (a) Rettangolo della figura precedente traslato
- (b) Spettro di (a)
- (c) Rettangolo ruotato
- (d) Spettro del rettangolo ruotato, che notiamo essere uguale a quello della figura originale

Dall'immagine notiamo che:

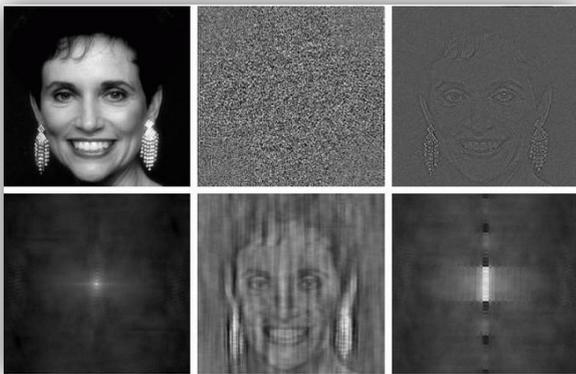
- Lo spettro è insensibile alla traslazione dell'immagine, in quanto il valore assoluto del termine esponenziale è 1, ma esso ruota attorno allo stesso angolo di un'immagine ruotata
- Ruotando l'immagine ruota anche lo spettro

Le componenti dello spettro della DFT determinano le ampiezze delle onde sinusoidali che si combinano per formare l'immagine risultante. Per ogni data frequenza nella DFT di un'immagine, una *grande ampiezza*

implica una maggiore prominente di una sinusoida a quella frequenza nell'immagine stessa; al contrario un'ampiezza minore implica che la sinusoida è meno presente nell'immagine.

Il contributo delle componenti di fase è meno intuitivo, ma importante, in quanto la *fase* è una misura dello spostamento delle varie sinusoidi rispetto alla loro origine. Mentre la *magnitudo* della DFT 2-D è una matrice le cui componenti determinano le intensità dell'immagine, la fase corrispondente è una matrice di angoli che ci fornisce numerose informazioni sulla posizione degli oggetti discernibili nell'immagine.

Vediamo un esempio che illustra l'importanza della fase:



- (a) Immagine di donna
- (b) Angolo di fase
- (c) Ricostruzione della donna facendo uso solamente dell'angolo di fase
- (d) Ricostruzione della donna utilizzando solamente lo spettro
- (e) Ricostruzione effettuata utilizzando l'angolo di fase corrispondente a quello dell'immagine della donna e lo spettro del rettangolo precedente
- (f) Ricostruzione effettuata utilizzando la fase del rettangolo e lo spettro della donna

Dall'immagine notiamo che:

- In (b) l'analisi visiva non consente nessuna associazione con il contenuto specifico dell'immagine corrispondente.
- L'immagine (c) è stata ottenuta calcolando l'antitrasformata discreta di Fourier, facendo uso solamente delle informazioni desunte dalla fase. Le informazioni riguardanti le intensità sono andate perdute (infatti vengono preservate dallo spettro), mentre le caratteristiche di base della forma complessiva di quest'immagine sono facilmente riconducibili all'immagine iniziale della donna.
- L'immagine (d) è stata ottenuta facendo uso solamente dello spettro e calcolando l'antitrasformata discreta di Fourier, ponendo il termine esponenziale uguale a 1 e quindi con un angolo di fase nullo. L'immagine contiene soltanto le informazioni che riguardano l'intensità, con il termine *dc* che risulta dominante; non c'è alcuna informazione che riguardi la forma nell'immagine, proprio perché la fase è stata annullata.
- Nell'immagine (e) domina la forma della donna, infatti è stato utilizzato lo spettro del rettangolo e l'angolo di fase corrispondente all'immagine della donna. In (f) avviene esattamente il contrario, infatti domina il rettangolo.

### **Teorema della convoluzione 2-D**

Il teorema della convoluzione 2-D è dato dalle seguenti espressioni:

$$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)H(u, v)$$

e

$$f(x, y)h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \star H(u, v)$$

Come nel caso monodimensionale la doppia freccia è utilizzata per indicare che sia la parte sinistra che la parte destra delle espressioni costituiscono una coppia di Fourier.

Per i nostri scopi ci interessa soprattutto la prima, la quale afferma che l'antitrasformata di Fourier del prodotto  $F(u, v)H(u, v)$  è uguale a  $f(x, y) \star h(x, y)$ , ovvero alla convoluzione spaziale 2-D di  $f$  e  $h$ ; analogamente dalla DFT della convoluzione spaziale si ottiene il prodotto delle trasformate nel dominio della frequenza.

## Le basi per il filtraggio nel dominio della frequenza

### Caratteristiche aggiuntive del dominio della frequenza

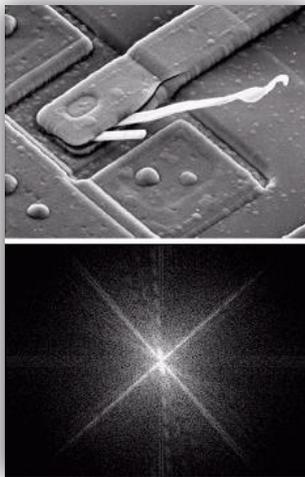
Dall'equazione della trasformata discreta di Fourier notiamo che ciascun termine di  $F(u, v)$  contiene tutti i valori di  $f(x, y)$  modificati dai valori dei termini esponenziali. Quindi risulta impossibile fare delle associazioni dirette tra le componenti specifiche di un'immagine e la sua trasformata.

Nonostante ciò possiamo trovare delle relazioni tra le componenti in frequenza della trasformata di Fourier e le caratteristiche spaziali di un'immagine. Infatti la frequenza è direttamente collegata alla velocità spaziale delle variazioni di intensità, quindi risulta possibile associare le frequenze nella trasformata alle variazioni di intensità.

Precedentemente abbiamo visto che la più lenta componente variabile in frequenza ( $u = v = 0$ ) è proporzionale all'intensità media di un'immagine. Quando ci si allontana dall'origine della trasformata, le frequenze più basse corrispondono alle componenti di intensità di un'immagine che variano lentamente (nell'immagine di una stanza ad esempio le variazioni di intensità sulle pareti e sul pavimento). Quando ci si sposta ancora più lontano dall'origine le frequenze più alte cominciano a corrispondere a variazioni di intensità sempre più veloci nell'immagine; queste corrispondono ai contorni degli oggetti o altre componenti caratterizzate da bruschi cambiamenti di intensità.

Le tecniche di filtraggio nel dominio della frequenza si basano sulla modifica della trasformata di Fourier per raggiungere gli obiettivi prefissati e poi, calcolando l'antitrasformata discreta, tornare al dominio dell'immagine, ricordando che le componenti alle quali abbiamo accesso sono lo *spettro* (la magnitudo della trasformata) e l'*angolo di fase*.

Vediamo un esempio che illustra le relazioni tra un'immagine e il suo spettro:



Le caratteristiche principali del dispositivo sono:

- Contorni marcati disposti approssimativamente a  $\pm 45^\circ$
- Due protrusioni bianche ossidate risultato di un guasto

Lo spettro infatti mostra le componenti a  $\pm 45^\circ$ ; la componente lungo l'asse verticale un po' fuori asse sulla sinistra è provocata dagli edge delle protrusioni.

### Filtraggio nel dominio della frequenza

Data un'immagine digitale  $f(x, y)$ , di dimensioni  $M \times N$ , l'equazione del filtraggio è la seguente:

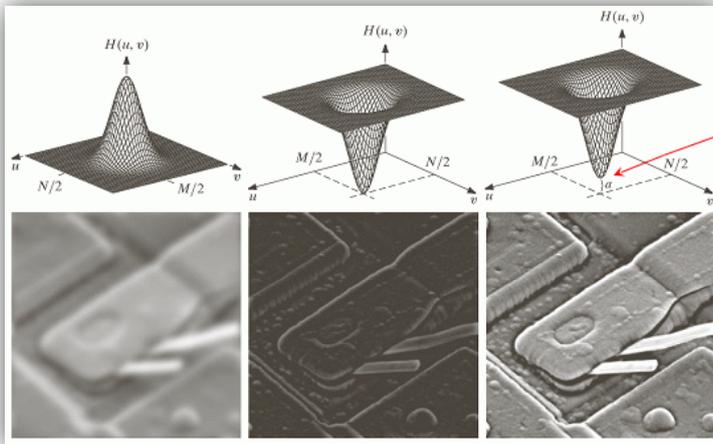
$$g(x, y) = \mathfrak{S}^{-1}[H(u, v)F(u, v)]$$

dove  $\mathfrak{S}^{-1}$  è l'antitrasformata di Fourier;  $F(u, v)$  è la trasformata dell'immagine di input  $f(x, y)$ ;  $H(u, v)$  è la funzione filtro, che modifica la trasformata dell'immagine di input per ottenere un output processato;  $g(x, y)$  è ovviamente l'immagine filtrata. Le funzioni  $F$ ,  $H$  e  $g$  sono matrici di dimensioni  $M \times N$ . Da ricordare che si utilizzano funzioni simmetriche rispetto al loro centro, che fanno in modo che  $F(u, v)$  sia centrata a sua volta.

Come abbiamo già accennato precedentemente le *basse frequenze* nella trasformata sono relazionate alle componenti di un'immagine che modificano in maniera graduale la loro intensità (pareti stanza o cielo di un panorama), mentre le *alte frequenze* sono relazionate alle componenti che modificano in maniera brusca la loro intensità (contorni e rumore). Quindi un filtro *low pass* (passa basso) che lascia passare le basse

frequenze ed attenua le alte dovrebbe sfocare l'immagine, mentre un filtro *high pass* (passa alto) dovrebbe migliorare la nitidezza dei dettagli. Nel caso del filtro *high pass* è necessario aggiungere una piccola costante (indicata dalla freccia rossa in figura), che previene l'eliminazione del termine dc e preserva la tonalità, altrimenti se il termine dc diventa zero, lo diventa anche l'intensità media dell'immagine di output, diventando quindi molto scura.

L'immagine illustra i due filtri e il problema del termine dc azzerato:



Prima riga: filtri nel dominio della frequenza.

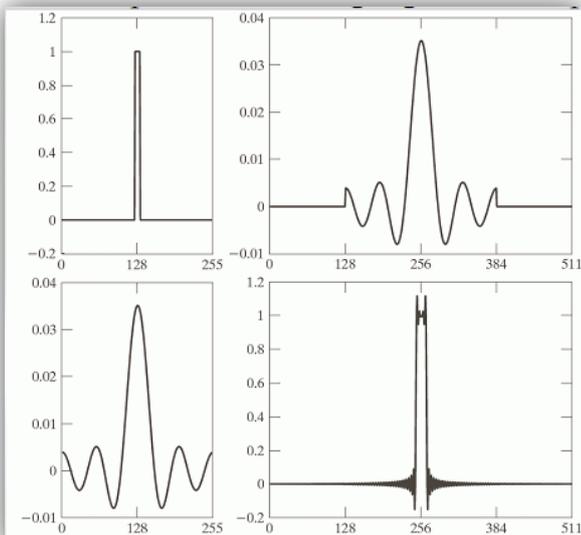
Seconda riga: immagini filtrate.

Abbiamo già visto che solitamente conviene introdurre dello zero-padding a un'immagine per evitare di ottenere risultati erranei. Finora lo abbiamo applicato all'immagine di input, ma qual è la relazione tra il padding spaziale e i filtri individuati direttamente nel dominio della frequenza?

Il metodo migliore per adoperare il padding di un filtro nel dominio della frequenza potrebbe essere quello di creare un filtro (delle stesse dimensioni dell'immagine); calcolare la sua IDFT per ottenere il filtro spaziale corrispondente; eseguire il padding del filtro nel dominio spaziale; calcolare la DFT per tornare nel dominio della frequenza. Questo metodo non va bene, perché le discontinuità nel filtro spaziale creano un *ringing* (risonanza) nella sua controparte del dominio della frequenza.

In dettaglio, la trasformata di Fourier di una funzione box è una funzione *sinc* le cui componenti della frequenza si estendono all'infinito e quindi ci aspettiamo lo stesso comportamento anche per l'antitrasformata della funzione box, perciò la rappresentazione spaziale di un filtro ideale (box) nel dominio della frequenza possiede le componenti che si estendono all'infinito. Quindi un qualsiasi troncamento spaziale del filtro indotto che implementa il processo di padding introdurrà delle discontinuità, che daranno vita al fenomeno di ringing nel dominio della frequenza. Il risultato è che non è possibile utilizzare un filtro ideale nel dominio della frequenza e contemporaneamente utilizzare lo zero padding per evitare errori, dal momento che non si possono gestire un numero infinito di componenti.

Vediamo un'immagine che illustra il fenomeno del ringing:



(a) Filtro originale individuato (centrato) nel dominio della frequenza

(b) (immagine in basso a sinistra) Rappresentazione spaziale ottenuta dal calcolo della IDFT di (a)

(c) Risultato del padding di (b) per il doppio della sua lunghezza, si notino le discontinuità

(d) Filtro corrispondente nel dominio della frequenza ottenuto dal calcolo della DFT di (c). E' presente il ringing a causa delle discontinuità di (c)

Il nostro obiettivo è quello di lavorare con filtri caratterizzabili nel dominio della frequenza senza preoccuparsi di eventuali troncamenti. Perciò il metodo da utilizzare è quello di applicare lo zero padding alle immagini e successivamente creare i filtri nel dominio della frequenza delle stesse dimensioni delle immagini padded (utilizzando la DFT filtri e immagini devono avere le stesse dimensioni).

La DFT è una matrice complessa, quindi possiamo esprimerla in questo modo:

$$F(u, v) = R(u, v) + jI(u, v)$$

dove  $R$  è la parte reale;  $I$  è la parte immaginaria.

Andando a sostituire questa espressione con quella illustrata all'inizio del paragrafo otteniamo:

$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}[H(u, v)R(u, v) + jH(u, v)I(u, v)]$$

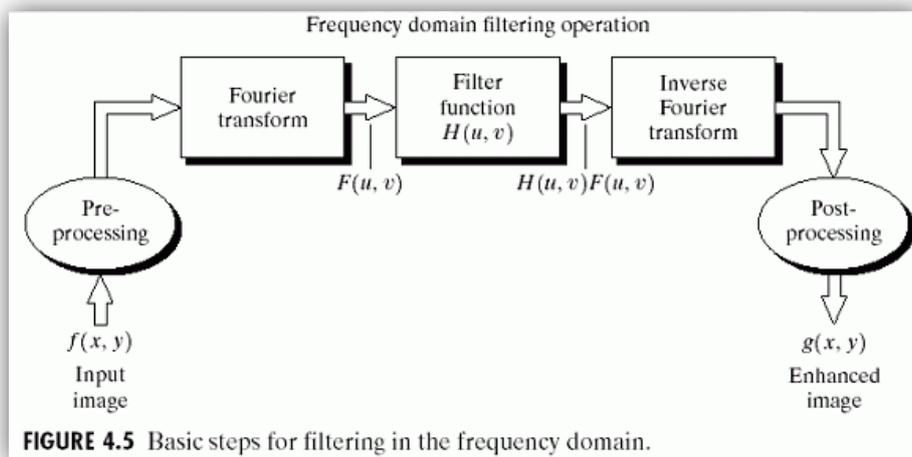
I *filtri senza traslazione di fase* sono quei filtri che interessano la parte reale e la parte immaginaria allo stesso modo e che non hanno effetti sulla fase. Utilizziamo questi perché anche piccole variazioni all'angolo di fase possono avere effetti disastrosi e inaspettati sull'output filtrato.

Riassumiamo i passi da seguire per effettuare il filtraggio nel dominio della frequenza

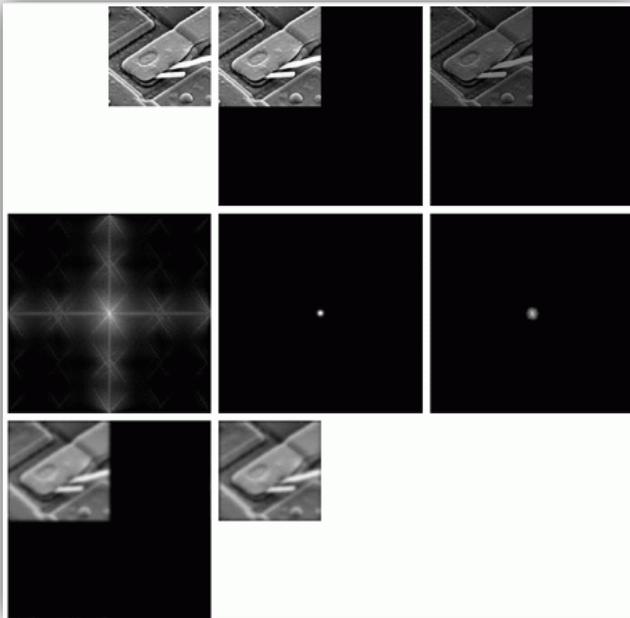
1. Data un'immagine di input  $f(x, y)$  di dimensioni  $M \times N$ , si ricavano i parametri di padding  $P$  e  $Q$ , solitamente  $P = 2M$  e  $Q = 2N$ .
2. Si forma un'immagine padded  $f_p(x, y)$  di dimensioni  $P \times Q$ , estendendo  $f(x, y)$  con il necessario numero di zeri
3. Si moltiplica  $f_p(x, y)$  per  $(-1)^{x+y}$  per centrare la trasformata
4. Si calcola la DFT  $F(u, v)$  dell'immagine del punto 3
5. Si genera una funzione filtro simmetrica e reale  $H(u, v)$ , di dimensioni  $P \times Q$  con il centro nelle coordinate  $(P/2, Q/2)$
6. Si ottiene l'immagine:

$$g_p(x, y) = \{\text{real}[\mathfrak{F}^{-1}[G(u, v)]]\}(-1)^{x+y}$$

7. Il risultato finale  $g(x, y)$  è ottenuto attraverso l'estrazione della regione  $M \times N$  dal quadrante in alto a sinistra di  $g_p(x, y)$



Vediamo delle immagini che illustrano ciascun passo del filtraggio:



- (a) Immagine  $f$ , di dimensioni  $M \times N$
- (b) Immagine padded  $f_p$  di dimensioni  $P \times Q$
- (c) Risultato della moltiplicazione di  $f_p$  per  $(-1)^{x+y}$
- (d) Spettro di  $F_p$
- (e) Filtro low pass gaussiano centrato,  $H$ , di dimensioni  $P \times Q$
- (f) Spettro del prodotto di  $HF_p$
- (g)  $g_p$ , il prodotto di  $(-1)^{x+y}$  per la parte reale, della IDFT di  $HF_p$
- (h) risultato finale  $g$  ottenuto selezionando le prima  $M$  righe e  $N$  colonne di  $g_p$

### **Corrispondenza tra il filtraggio nel dominio spaziale e quello nel dominio della frequenza**

Il legame fondamentale tra il filtraggio eseguito nel dominio spaziale e quello eseguito nel dominio della frequenza è costituito dal teorema della convoluzione.

Dato un filtro spaziale, otteniamo la sua rappresentazione nel dominio della frequenza prendendo la trasformata di Fourier del filtro spaziale. I due filtri infatti formano una coppia di Fourier:

$$h(x, y) \Leftrightarrow H(u, v)$$

dove  $h(x, y)$  è un filtro spaziale, che viene chiamato anche risposta finita all'impulso di  $H(u, v)$ , in quanto questo filtro può essere ottenuto dalla risposta di un filtro nel dominio della frequenza ad un impulso.

Un modo per trarre vantaggio dalla proprietà di entrambi i domini è quello di specificare un filtro nel dominio della frequenza, calcolare la sua IDFT, e poi utilizzarne il filtro spaziale risultante come una *guida* per la costruzione di maschere filtro spaziali più piccole.

I filtri basati sulle funzioni gaussiane sono interessanti perché sia la trasformata di Fourier della funzione gaussiana che la sua antitrasformata sono funzioni gaussiane reali. Le equazioni che caratterizzano i filtri nei due domini hanno le seguenti peculiarità:

- rappresentano una coppia di Fourier, le cui componenti sono entrambe gaussiane e reali, facilitando l'analisi in quanto non ci sono numeri complessi.
- Entrambe le funzioni hanno un comportamento che si influenza reciprocamente. Quando il filtro nel dominio della frequenza ha un profilo ampio, quello nel dominio spaziale (ottenuto tramite l'antitrasformata) ha un profilo ristretto, e viceversa.

Più il filtro nel dominio della frequenza è stretto, più esso attenuerà le basse frequenze, aumentando la sfocatura

Il dominio della frequenza può essere considerato come un *laboratorio* nel quale approfittare dei vantaggi della corrispondenza tra il contenuto della frequenza e l'aspetto dell'immagine. In molti casi infatti gli obiettivi non sono raggiungibili nel dominio spaziale, mentre diventano banali nel dominio della frequenza. Una volta individuato un filtro specifico attraverso la sperimentazione nel dominio della frequenza, l'implementazione reale del metodo viene svolta nel dominio spaziale.

## Smoothing di un'immagine utilizzando i filtri nel dominio della frequenza

Lo smoothing nel dominio della frequenza è ottenuto tramite l'attenuazione delle frequenze più alte, cioè tramite il filtraggio low pass. Abbiamo già visto infatti che i contorni e le transizioni di intensità più nette (il rumore) contribuiscono nell'immagine a incrementare il contenuto di alte frequenze nella sua trasformata.

### Filtri low pass ideali

Il filtro low pass ideale ILPF è un filtro low pass 2-D che lascia passare, senza attenuarle, tutte le frequenze all'interno di un cerchio di raggio  $D_0$ , centrato sull'origine, e "taglia fuori" (annulla) tutte le frequenze al di fuori di questo cerchio.

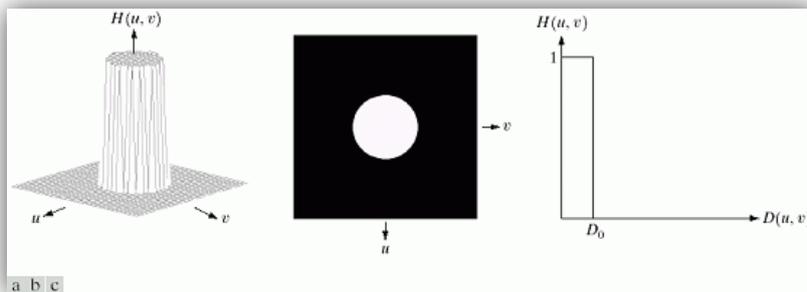
La funzione che lo caratterizza è la seguente:

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{se } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

dove  $D_0$  è una costante positiva.

In una sezione trasversale del filtro low pass ideale, il punto di transizione tra  $H(u, v) = 1$  e  $H(u, v) = 0$  è chiamato *frequenza di taglio* (*cut-off frequency*). Nell'immagine sotto la frequenza di taglio è  $D_0$ .

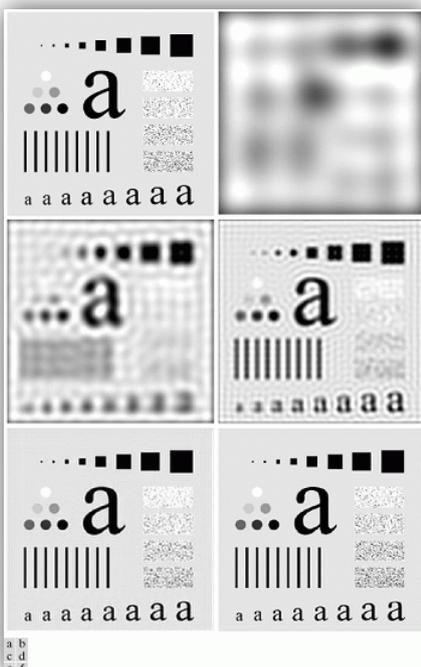
La netta frequenza di taglio di un filtro ideale low pass non può essere realizzata in hardware, sebbene possa essere simulata al computer.



- (a) Diagramma prospettico di una funzione filtro low pass ideale
- (b) Filtro visualizzato come immagine
- (c) Sezione trasversale radiale del filtro

Un modo per stabilire un insieme di valori standard per le corrispondenti frequenze di taglio è quello di calcolare i cerchi che racchiudono uno specifico ammontare di potenza totale dell'immagine  $P_T$ .

Vediamo un esempio:

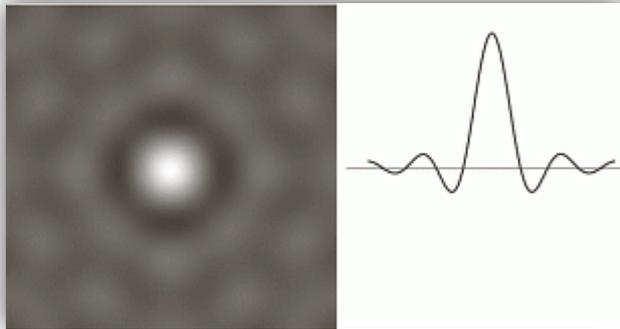


- (a) immagine originale
- (b) – (f) risultati del filtraggio effettuato attraverso i filtri low pass ideali con frequenza di taglio stabilita dai valori dei raggi 10, 30, 60, 160, 460. Questi cerchi racchiudono rispettivamente l'87%, il 93.1%, il 95.7%, il 97.8% della potenza spettrale complessiva.

La forte sfocatura dell'immagine (b) indica che i dettagli sono contenuti nel 13% di potenza rimossa dal filtro. Al crescere del raggio, si rimuove una quantità di spettro via via minore, e anche la sfocatura diminuisce.

Dall'esempio notiamo che il filtraggio low pass ideale è poco funzionale.

La sfocatura e il ringing provocati dai ILPF si spiegano utilizzando il teorema della convoluzione.



- (a) *Rappresentazione nel dominio spaziale di un filtro low pass ideale*
- (b) *Profilo dell'intensità di una linea orizzontale passante per il centro dell'immagine*

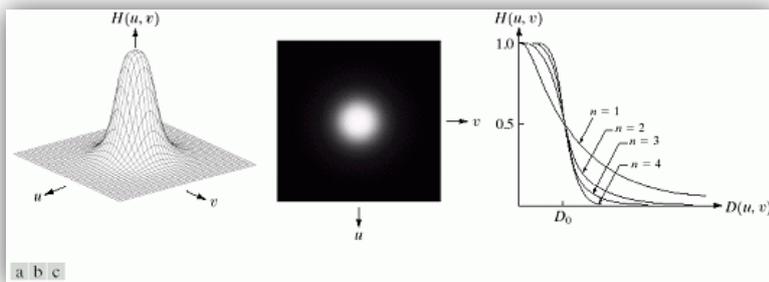
Dal momento che una sezione trasversale del filtro low pass ideale nel dominio della frequenza assomiglia a un filtro box, la sezione trasversale del corrispondente filtro spaziale ha la forma di una funzione sinc; ricordiamo che il filtraggio nel dominio spaziale è dato dalla convoluzione di  $h(x, y)$  con l'immagine e che operando la convoluzione di una funzione sinc con un impulso si copia il sinc nella posizione dell'impulso stesso. Il *lobo centrale* della funzione sinc è la causa principale della sfocatura, mentre i *lobi più esterni* e piccoli sono i principali responsabili del ringing.

Dal momento che l'estensione della funzione sinc è inversamente proporzionale al raggio di  $H(u, v)$  più  $D_0$  diventa grande, più il sinc spaziale si avvicina a un impulso che, al limite, non provoca nessun tipo di sfocatura quando si opera la convoluzione con l'immagine.

### Filtri low pass di Butterworth

La funzione di trasferimento di un filtro low pass di Butterworth di ordine  $n$ , con frequenza di taglio posta a distanza  $D_0$  dall'origine, è definita:

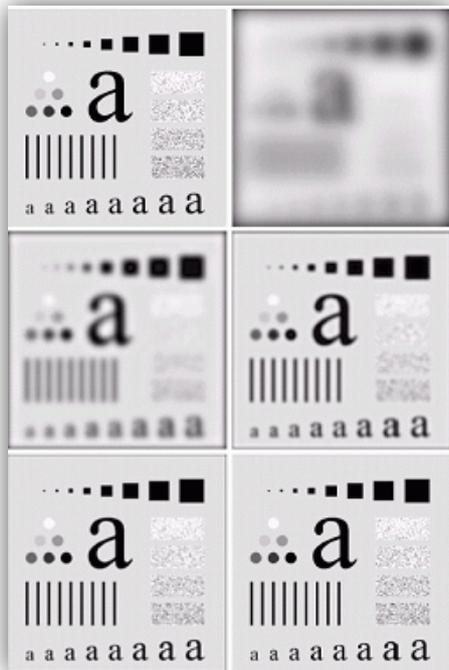
$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$$



- (a) *Diagramma prospettico della funzione di trasferimento di un filtro lowpass di Butterworth*
- (b) *Filtro visualizzato come immagine*
- (c) *Sezioni trasversali radiali del filtro di ordine 1-4*

La funzione di trasferimento del filtro low pass di Butterworth è graduale, in quanto non ha una discontinuità marcata che indica un taglio netto tra le frequenze filtrate e quelle che vengono lasciate passare. In questo caso è possibile definire la posizione della frequenza di taglio come il luogo dei punti in cui  $H(u, v)$  è minore di una determinata frazione del suo valore massimo; il 50% del valore massimo si ha per  $D(u, v) = D_0$ .

Vediamo lo stesso esempio di prima, ma utilizzando il filtro di Butterworth:

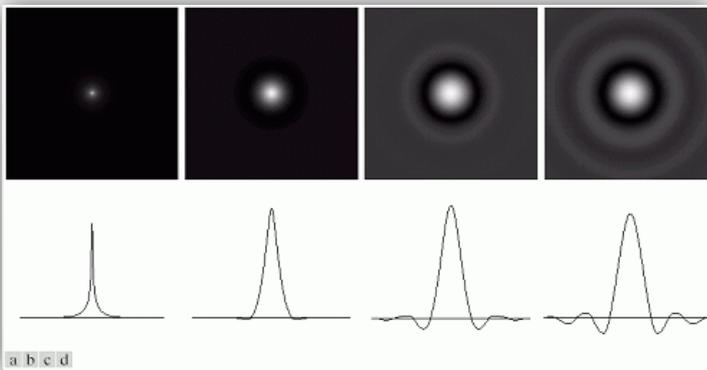


(a) Immagine originale  
 (b) – (f) Risultati del filtraggio effettuato attraverso i filtri low pass di Butterworth di ordine 2, con le stesse frequenze di taglio dell'esempio del filtro ideale

Notiamo che non è presente del ringing in nessuna delle immagini processate, ciò è dovuto alla transizione graduale tra le frequenze basse e alte.

Specifichiamo però che la presenza del ringing dipende dall'ordine utilizzato, infatti un filtro di ordine 1 non presenta ringing nel dominio spaziale; di ordine 2 è impercettibile, quindi risulta essere una soluzione ottimale per avere un buon compromesso tra l'effettivo filtraggio e la presenza di ringing; il fenomeno diventa significativo negli ordini superiori, infatti un filtro low pass di Butterworth di ordine 20 porta a dei risultati simili a quelli del filtro low pass ideale.

Le immagini illustrano quattro diversi ordini:



(a) – (d) rappresentazione spaziale dei BPLF di ordine 1, 2, 5, 20 e i corrispondenti profili di intensità passanti per il centro dei filtri; come abbiamo detto prima il ringing aumenta all'aumentare dell'ordine.

### Filtri low pass gaussiani

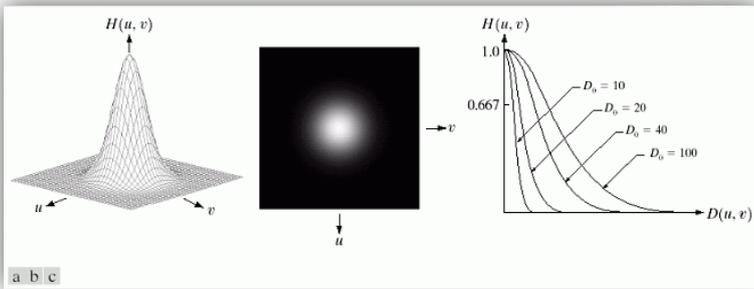
I filtri low pass gaussiani GLPF sono definiti dalla seguente espressione:

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$$

Dove  $D_0$  è la frequenza di tagli; quando  $D(u, v) = D_0$  il filtro low pass gaussiano è più piccolo del suo massimo valore di 0.607.

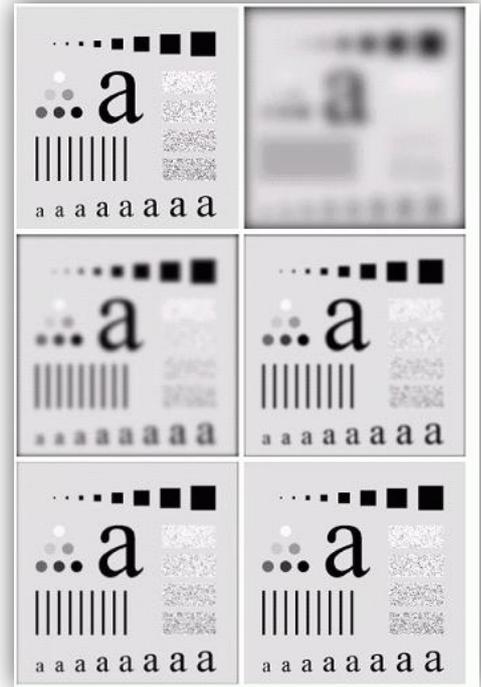
L'antitrasformata di Fourier del filtro low pass gaussiano è a sua volta una funzione gaussiana, quindi il filtro spaziale gaussiano, ottenuto dal calcolo della IDFT, non avrà ringing.

Vediamo la solita rappresentazione grafica:



(a) Diagramma prospettico della funzione di trasferimento del filtro low pass gaussiano  
 (b) Filtro visualizzato come immagine  
 (c) Sezioni trasversali radiali dei differenti valori di  $D_0$

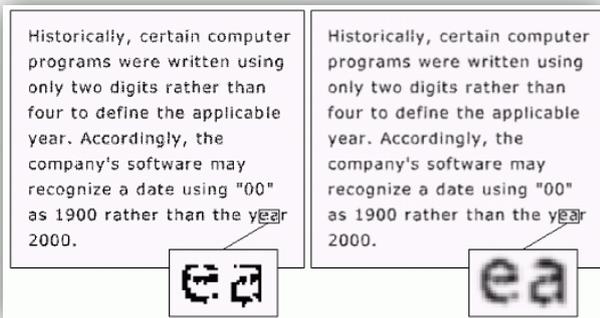
Vediamo come si comporta il filtro gaussiano con l'esempio utilizzato per i precedenti due filtri: notiamo che la transizione graduale nella sfocatura è legata all'incremento della frequenza di taglio. Il filtro gaussiano ha come risultato un minore livello di smoothing rispetto al filtro low pass di Butterworth di ordine 2 sebbene la frequenza di taglio sia uguale. Siamo comunque certi dell'assenza di ringing.



(a) Immagine originale  
 (b) – (f) risultati del filtraggio effettuato con il filtro low pass gaussiano, con le stesse frequenze di taglio dell'esempio del filtro ideale

Vediamo qualche applicazione dei filtri appena descritti.

Esempio 1



(a) campioni di testo a bassa risoluzione  
 (b) Risultato del filtraggio con il filtro low pass gaussiano (i segmenti dei caratteri sono stati uniti)

Nell'immagine notiamo che i caratteri presentano forme distorte e fratture. I sistemi di riconoscimento automatico hanno difficoltà ad acquisire correttamente questi caratteri ed una possibile soluzione è quella di colmare gli spazi vuoti nell'immagine di input attraverso la sfocatura.

L'immagine di destra è stata ottenuta con un filtro low pass gaussiano con  $D_0 = 80$ .

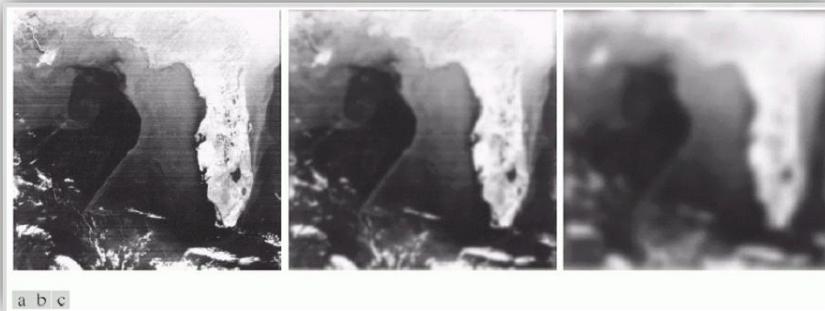
### Esempio 2



- (a) Immagine originale
- (b) Risultato del filtraggio effettuato attraverso il filtro low pass gaussiano con  $D_0 = 100$
- (c) Risultato del filtraggio effettuato attraverso il filtro low pass gaussiano con  $D_0 = 80$ . Le rughe vengono ridotte notevolmente

L'obiettivo di questo filtraggio è quello di ottenere un risultato più dolce e attenuato rispetto all'originale, eliminando le rughe e le piccole imperfezioni.

### Esempio 3



- (a) Immagine con linee di scansione orizzontali
- (b) Risultato del filtraggio effettuato attraverso il filtro low pass gaussiano con  $D_0 = 50$
- (c) Risultato del filtraggio effettuato attraverso il filtro low pass gaussiano con  $D_0 = 20$

Le immagini acquisite da sensori remoti hanno una certa predisposizione ad avere delle linee pronunciate ben visibili lungo la direzione in cui la scena viene scansionata. Il filtraggio low pass è un modo rude, ma semplice per ridurre la presenza di queste linee.

### **Sharpening di un'immagine utilizzando i filtri nel dominio della frequenza**

Lo sharpening di un'immagine può essere effettuato nel dominio della frequenza attraverso il filtraggio high pass, che attenua le componenti a bassa frequenza e lascia passare le frequenze più alte nella trasformata di Fourier.

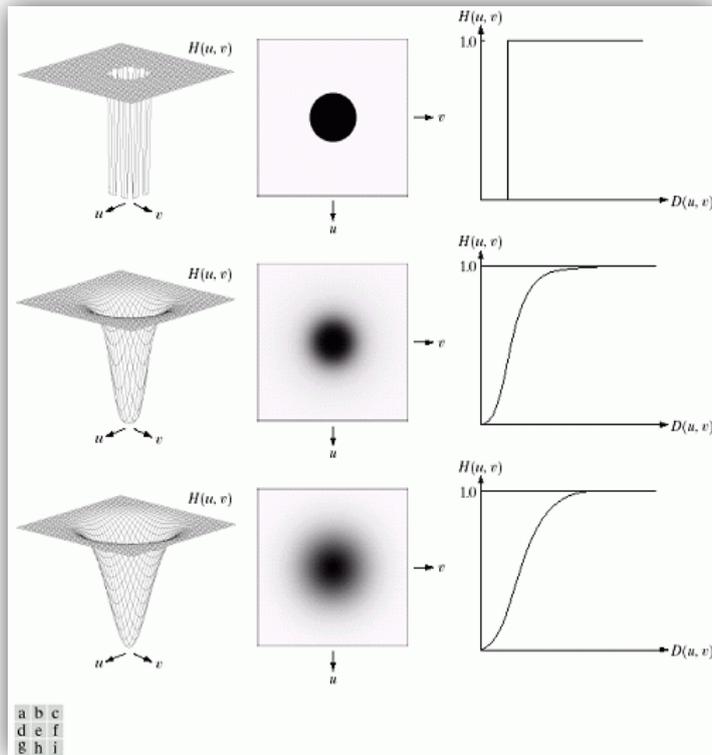
Un filtro high pass si ottiene a partire da un filtro low pass utilizzando l'equazione:

$$H_{HP}(u, v) = 1 - H_{LP}(u, v)$$

dove  $H_{LP}(u, v)$  è la funzione di trasferimento del filtro low pass. Quando il filtro low pass attenua le frequenze, il filtro high pass le lascia passare e viceversa.

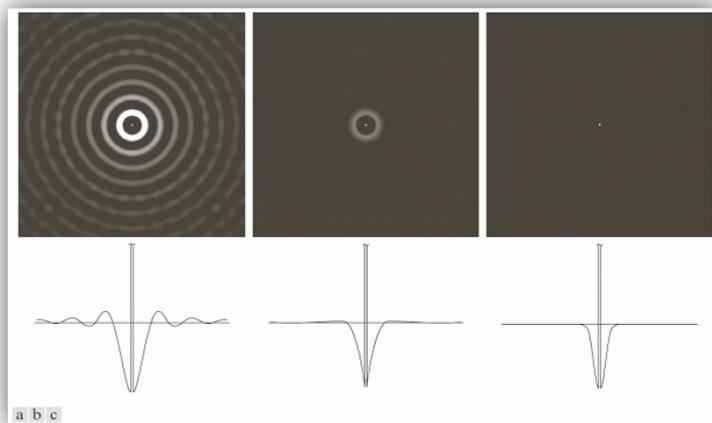
Anche nel caso dello sharpening il filtro di Butterworth può essere considerato una via di mezzo tra il filtro ideale e quello gaussiano.

Vediamo le caratteristiche generali dei tre filtri (ideale; Butterworth; gaussiano) con queste due immagini:



- (a) Diagramma prospettico
- (b) Rappresentazione mediante immagine
- (c) Sezione trasversale di un filtro high pass ideale

Nella seconda riga abbiamo il filtro di Butterworth e nella terza il filtro gaussiano. Notiamo che le caratteristiche sono praticamente identiche a quelle del filtro low pass, solamente invertiti.



Rappresentazione spaziale dei filtri high pass nel dominio della frequenza

- (a) Ideale
- (b) Butterworth
- (c) Gaussiano

Ora vediamoli più in dettaglio.

### Filtri high pass ideali

Un filtro high pass ideale 2-D IHPL è definito:

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{se } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{se } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

dove  $D_0$  come al solito è la frequenza di taglio.

Il filtro high pass porta a zero tutte le frequenze all'interno del cerchio di raggio  $D_0$  e lascia passare, senza attenuarle, tutte le frequenze esterne. Nella pratica non è fisicamente realizzabile.

### Filtri high pass di Butterworth

Un filtro high pass di Butterworth 2-D BHPF di ordine  $n$  con frequenza di taglio uguale a  $D_0$  è definito:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$$

Come nel caso dei filtri low pass, i filtri high pass di Butterworth hanno dei risultati più tenui rispetto ai filtri high pass ideali.

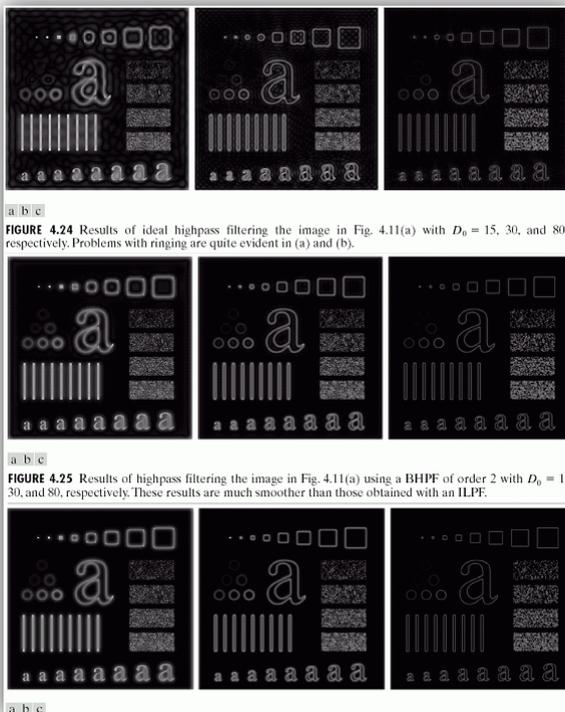
### Filtri high pass gaussiani

La funzione di trasferimento del filtro high pass gaussiano GHPF, la cui frequenza di taglio è posta a distanza  $D_0$  dal centro del rettangolo della frequenza è data da:

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$

I risultati ottenuti sono più tenui di quelli dei precedenti due filtri.

Vediamo un esempio dove i tre filtri appena visti vengono applicati alla stessa immagine:



*Prima riga: risultati del filtraggio high pass utilizzando un filtro ideale con  $D_0 = 30, 60, 160$ .*

*Il ringing in (a) è così forte da ottenere delle linee di contorno distorte e spesse.*

*In (c) i contorni sono più puliti e meno distorti e gli oggetti più piccoli sono stati filtrati.*

*In generale il background si annulla in tutte le immagini sottoposte a filtraggio high pass poiché è analogo alla differenziazione del dominio spaziale.*

*Seconda riga: risultati del filtraggio high pass utilizzando un BPHF di ordine 2, con  $D_0 = 30, 60, 160$ .*

*I contorni sono molto meno distorti rispetto a quelli del filtraggio ideale, anche per valori più piccoli della frequenza di taglio.*

*Le prestazioni del filtro ideale e di Butterworth sono simili sui piccoli oggetti, in quanto le dimensioni nell'area centrale sono simili. Con il BPHF però la transizione verso i valori più alti delle frequenze di taglio è più graduale.*

*Terza riga: risultati del filtraggio high pass utilizzando un GHPF con  $D_0 = 30, 60, 160$ .*

*I risultati ottenuti sono più tenui di quelli dei precedenti filtri.*

*Il filtraggio degli oggetti più piccoli e delle sottili barre verticali è più chiaro con il filtro gaussiano.*

### Il laplaciano nel dominio della frequenza

Il metodo laplaciano può essere implementato nel dominio della frequenza utilizzando il filtro:

$$H(u, v) = -4\pi^2(u^2 + v^2)$$

o, rispetto al centro del rettangolo della frequenza, utilizzando il filtro:

$$H(u, v) = -4\pi^2 D^2(u, v)$$

L'immagine laplaciana quindi è ottenuta come:

$$\nabla^2 f(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{H(u, v)F(u, v)\}$$

dove  $F(u, v)$  è la DFT di  $f(x, y)$ .

L'enhancement è ottenuto utilizzando l'equazione:

$$g(x, y) = f(x, y) + c\nabla^2 f(x, y)$$

Le differenze tra  $f$  e il suo operatore laplaciano devono essere trasferite in range comparabili, questo viene fatto normalizzando i valori di  $f(x, y)$  nel range  $[0, 1]$  (prima di calcolare la sua DFT) e dividere  $\nabla^2 f(x, y)$  per il suo valore massimo, che condurrà il risultato nel range  $[-1, 1]$ .

### **Unsharp masking, filtraggio highboost e filtraggio di enfasi dell'alta frequenza**

L'espressione vista nel capitolo 3 che indica l'unsharp masking quando  $k=1$  e il filtraggio highboost quando  $k>1$ , è possibile esprimerla con termini del dominio della frequenza i cui calcoli comprendono un filtro low pass:

$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{[1 + k * [1 - H_{LP}(u, v)]]F(u, v)\}$$

È possibile sostituire il filtro low pass con un filtro high pass:

$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{[1 + k * [H_{HP}(u, v)]]F(u, v)\}$$

L'espressione all'interno delle parentesi quadre è chiamata *filtro di enfasi dell'alta frequenza*. I filtri high pass, come abbiamo già visto precedentemente, riducono a zero il termine  $dc$ , riducendo l'intensità media nell'immagine filtrata a zero. Invece il filtro di enfasi dell'alta frequenza non riscontra questo problema in quanto gli viene aggiunto il valore 1 (questo valore 1 può essere sostituito da un termine  $k \geq 0$  che specifica la distanza dall'origine). La costante  $k$  controlla la proporzione delle alte frequenze che influenzano il risultato finale.

### **Filtraggio omomorfico**

Il filtraggio omomorfico è un filtraggio che opera nel dominio della frequenza e quindi utilizza la Trasformata di Fourier. Questo tipo di filtraggio si basa sui concetti dell'illuminazione e della riflettanza per andare a migliorare l'aspetto dell'immagine effettuando operazioni di compressione dei range dell'intensità e miglioramento del contrasto.

Ciò è possibile perché un'immagine può essere espressa come prodotto delle componenti di illuminazione  $i(x, y)$  e riflettanza  $r(x, y)$ :

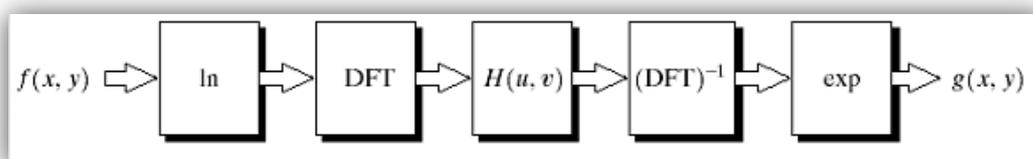
$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y)$$

questa equazione non può essere utilizzata direttamente nel dominio della frequenza perché la trasformata di Fourier di un prodotto non è uguale al prodotto delle trasformate. Per poter operare nella frequenza è necessario separare le componenti di illuminazione e riflettanza, in modo tale che il filtro possa operare separatamente sulle due componenti (ad operare sulle due componenti separatamente è la funzione del filtro omomorfico  $H(u, v)$ , che tratta le componenti a bassa e alta frequenza in modo differente); il risultato finale di output sarà dato da:

$$i_0(x, y) = e^{i'(x, y)}$$

$$r_0(x, y) = e^{r'(x, y)}$$

I passi fondamentali per arrivare a questo risultato sono i seguenti:



Il concetto fondamentale legato a questo tipo di filtraggio è che nel dominio spaziale la componente di illuminazione è caratterizzata da lente variazioni spaziali, mentre la componente di riflettanza tende a variare bruscamente soprattutto nei punti di separazione di oggetti differenti. Queste caratteristiche portano ad associare le *basse frequenze* della trasformata di Fourier con l'illuminazione e le *alte frequenze* con la riflettanza.

Quindi per ottenere una compressione del range dinamico e un miglioramento del contrasto bisogna amplificare gli effetti dovuti alle alte frequenze(riflettanza) e attenuare gli effetti dovuti alle basse frequenze(illuminazione).