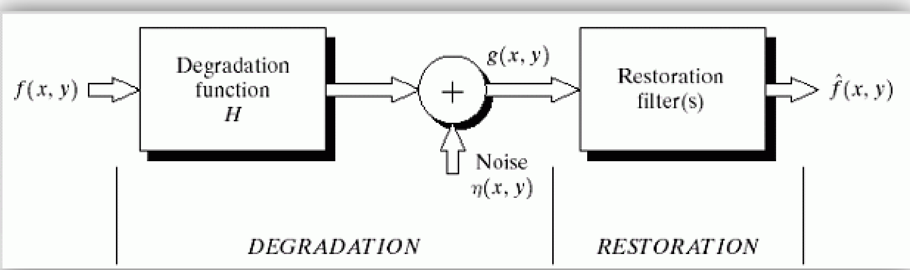
# Capitolo 5
# RESTAURO E RICOSTRUZIONE DI IMMAGINI

La differenza tra il restauro e il miglioramento (enhancement) delle immagini è che il miglioramento è un processo soggettivo, mentre il restauro è un processo oggettivo, che cerca di riparare un'immagine danneggiata (o degradata) facendo uso di una conoscenza a priori del fenomeno che ha provocato il degrado. Le tecniche di restauro quindi modellano il processo di degrado e cercano di generare il processo inverso che permette di ricostruire l'immagine originale.
Il processo di degrado/restauro dell'immagine è il seguente:




Quindi abbiamo un'immagine iniziale di input *f(x, y)* che tramite una funzione di degrado insieme a del rumore additivo diventa un'immagine degradata *g(x, y)*. Data *g(x, y),* della conoscenza a priori sulla funzione di degrado *H* e sul rumore *η(x,y)* l'obiettivo del restauro è quello di ottenere una stima $\hat{f}(x,y)$ dell'immagine originale.
Se *H* è un processo lineare invariante per posizione, l'immagine degradata nel dominio spaziale è:

$$g(x,y) = h(x,y) \star f(x,y) + \eta(x,y)$$

Dove *h(x,y)* è la rappresentazione spaziale della funzione di degrado.
La convoluzione nel dominio spaziale equivale a una moltiplicazione nel dominio della frequenza, quindi l'equazione precedente, nel dominio della frequenza, diventa:

$$G(u,v) = H(u,v)F(u,v) + N(u,v)$$

dove i termini in maiuscolo sono le trasformate di Fourier dei termini del dominio spaziale.

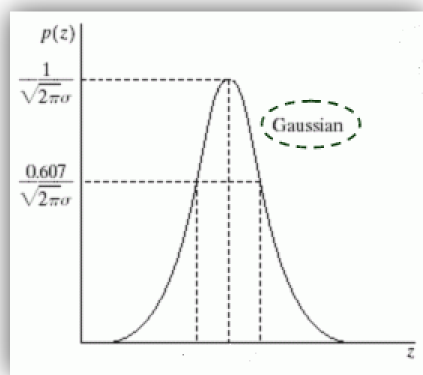
## Modelli di rumore

Come abbiamo già detto le immagini sono degradate per via della presenza di rumore, quindi Il **rumore** nelle immagini è una sorta di "disturbo" che peggiora la qualità dell'immagine, cioè ne diminuisce il contenuto informativo e visuale.
Il rumore ha origine durante le fasi di acquisizione e/o trasmissione. Durante l'acquisizione ad esempio i fattori che determinano la presenza di rumore possono essere: la qualità dell'illuminazione in una scena, la qualità del sensore, oppure la temperatura del sensore, ecc. Il rumore può essere introdotto durante la trasmissione a causa della presenza di alcune interferenze sul canale, cosa che può avvenire ad esempio se le immagini vengono trasmesse tramite wireless.
I principali tipi di rumore *additivo*, nel dominio spaziale, che ci interessano sono i seguenti:

- **rumore gaussiano** (o normale): viene molto utilizzato nella pratica. La PDF di una variabile casuale gaussiana *z* è data da:

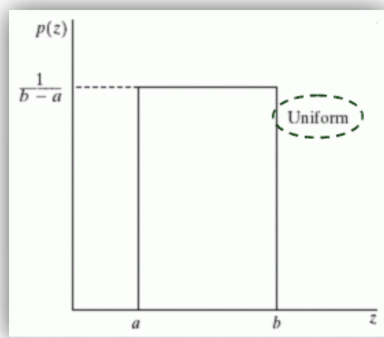
$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(z-\bar{z})^2/2\sigma^2}$$

  dove *z* è l'intensità, $\bar{z}$ è il valore medio, σ la deviazione standard.



- **rumore uniforme**: la PDF di questo rumore è data:

$$p(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } a \le z \ge b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



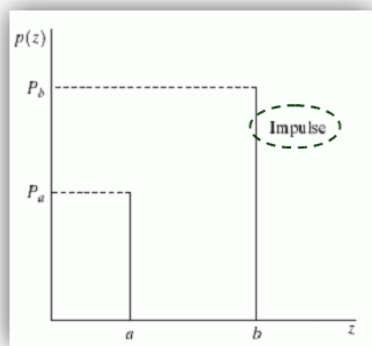

la *media* è:

$$\bar{z} = \frac{a+b}{2}$$

la *varianza* è:

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- **rumore impulsivo (sale e pepe)**: nell'immagine in cui è presente questo tipo di rumore si possono notare dei puntini neri e dei puntini bianchi oppure solo uno dei due tipi.
La definizione corretta del rumore *Sale e Pepe* è **Rumore a Impulsi Bipolare**, ma viene chiamato sale e pepe per via della somiglianza con i granuli sale-e-pepe che sono distribuiti casualmente nell'immagine.
Solitamente il rumore ad impulsi è presente quando si verificano transizioni veloci durante il processo di imaging.

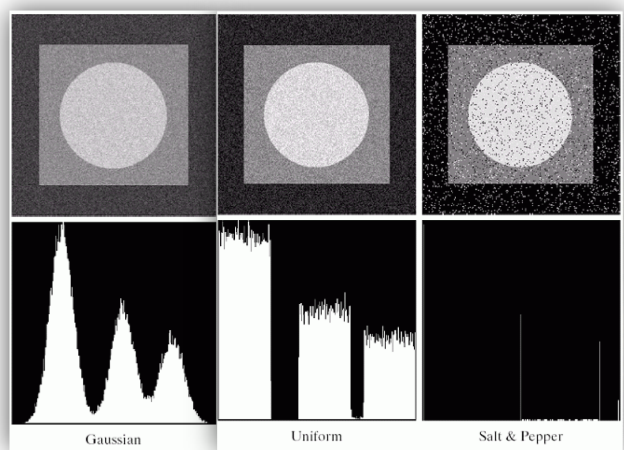



La densità di probabilità(PDF) di questo tipo di rumore è data da:

$$p(z) = \begin{cases} P_a & \text{per z = a} \\ P_b & \text{per z = b} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi se *b>a* apparirà come un punto chiaro nell'immagine, mentre se *a>b* allora comparirà come un punto scuro. Nel caso in cui *Pa* o *Pb* sono nulli allora il rumore viene definito **Unipolare**, cioè o solo Sale o solo Pepe per via della presenza di soli puntini bianchi o soli puntini neri.
I puntini bianchi e neri sono puri, quindi avranno il valore di intensità minore (*0* nero) e maggiore (*255* bianco) dell'immagine (non saranno gli unici pixel ad avere valore minore o maggiore, dipende da che tipo di immagine abbiamo), quindi nell'istogramma alle estremità avremo o dei picchi o comunque dei valori aggiuntivi (dipende sempre dal tipo di immagine che abbiamo).
Solitamente il filtro più efficace con il rumore Sale e Pepe è il filtro mediano, che nel caso di rumori casuali è più efficace rispetto ai filtri di smoothing perché sfoca di meno l'immagine. Questo filtro è efficace sia col rumore Bipolare sia Unipolare.
Il filtro mediano sostituisce il valore di un pixel con il mediano dei livelli di intensità nel suo intorno.

Vediamo qualche immagine di esempio dei rumore appena elencati:



***Rumore Periodico***

Un tipo particolare di rumore è quello **periodico** che deriva solitamente da interferenze elettriche o elettromeccaniche presenti durante l'acquisizione. Questo tipo di rumore è ridotto in modo efficace utilizzando il filtraggio nel dominio della frequenza. La trasformata di Fourier di una sinusoide pura è una coppia di impulsi coniugati localizzati alle frequenze coniugate dell'onda del seno, quindi se l'ampiezza dell'onda sinusoidale nel dominio spaziale è abbastanza pronunciata nello spettro dell'immagine troviamo una coppia di impulsi per ciascuna onda presente nell'immagine. In parole povere il rumore periodico si presenta come picchi concentrati di energia nel dominio di Fourier, nelle posizioni corrispondenti alle frequenze dell'interferenza periodica.

Ci sono tre modi per *stimare i parametri* del rumore periodico:

- ispezionando lo spettro di Fourier dell'immagine, analizzando i picchi visivamente
- agire sulle periodicità delle componenti del rumore direttamente dall'immagine
- analisi automatica quando i picchi di rumore sono molto pronunciati o si conosce a priori la posizione delle componenti in frequenza dell'interferenza

Vediamo due tipi di filtri che permettono di ridurre il rumore periodico (che operano *nel dominio delle frequenze*):

- **filtri band reject**:
  è un filtro stretto e preciso che viene utilizzato quando la posizione delle componenti del rumore nel dominio della frequenza è più o meno nota. I risultati ottenuti con questo filtro non possono essere ottenuti nel dominio spaziale tramite maschere di convoluzione.

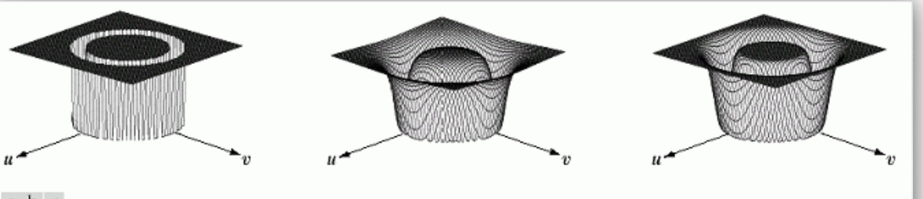
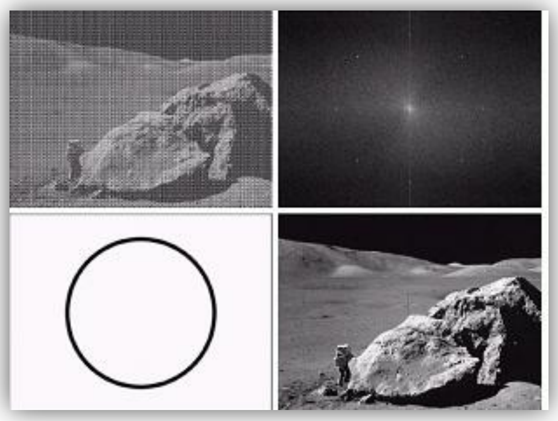



**FIGURE 5.15** From left to right, perspective plots of ideal, Butterworth (of order 1), and Gaussian bandreject filters.

- **filtri band pass**:
  esegue l'operazione opposta del filtro band reject, quindi toglie anche dettagli importanti dall'immagine; risulta efficace quando la componente rumore è concentrata su specifiche bande di frequenza.
  Si ottiene tramite la seguente equazione:

$$H_{BP}(u,v) = 1 - H_{BR}(u,v)$$

Vediamo un esempio:



*(a) Immagine corrotta da rumore sinusoidale*
*(b) Spettro (ogni paio di impulsi coniugati corrisponde ad un'onda del seno)*
*(c) Filtro band reject di Butterworth*
*(d) Risultato del filtraggio*

## Restauro in presenza solo di rumore – filtraggio spaziale

Nel caso in cui l'immagine sia deteriorata a causa della sola presenza di rumore additivo, allora dobbiamo utilizzare il filtraggio spaziale.
Ci sono vari tipi di filtri, vediamone qualcuno:

***filtri spaziali di media***

- *filtro di media aritmetica*:
  ha lo scopo di attenuare le variazioni locali di un'immagine riducendone il rumore. In pratica calcola il valore medio dell'immagine corrotta *g(x,y)* nell'area definita da $S_{xy}$, che è l'insieme delle coordinate in un intorno di dimensioni *mxn* centrato sul punto (*x,y*). Il valore dell'immagine restaurata $\hat{f}$ nel punto (*x,y*) è la media aritmetica calcolata utilizzando i pixel nella regione $S_{xy}$, in formula:
  $$\hat{f}(x,y) = \frac{1}{mn} \sum_{(s,t)\epsilon S_{xy}} g(s,t)$$

- *filtro di media geometrica*:
  raggiunge uno smoothing simile a quello del filtro di media aritmetica, ma porta ad una minore perdita di quantità di dettagli.
  Ogni pixel restaurato è dato dal prodotto dei pixel nella finestra della sottoimmagine, elevato alla potenza di *1/mn*.

***filtri basati sulle statistiche d'ordine***:
filtri spaziali la cui risposta si basa sull'ordinamento (posizione) dei valori dei pixel contenuti nell'area dell'immagine inglobata al filtro.

- *filtro mediano*:
  sostituisce il valore di un pixel con il mediano dei livelli di intensità nel suo intorno:
  $$\hat{f}(x,y) = \underset{(s,t)\epsilon S_{xy}}{mediano} \{g(s,t)\}$$
  Sono molto potenti in presenza di rumore casuale (soprattutto rumore a impulsi bipolare e unipolare), poiché riducono di molto il rumore e sfocano meno rispetto ad altri filtri spaziali. Ripetuti passaggi di questo filtro sfocano l'immagine ulteriormente, quindi sarebbe meglio limitare il numero di applicazioni successive.
  Da notare che è efficace col rumore a impulsi se la densità spaziale del rumore non è troppo ampia, cioè deve essere minore di *0,2*.

- *filtri massimo e minimo*:
  il *massimo* si ottiene utilizzando il *100-esimo* valore percentile:
  $$\hat{f}(x,y) = \underset{(s,t)\epsilon S_{xy}}{max} \{g(s,t)\}$$
  Serve per trovare i punti più chiari di un'immagine e permette di ridurre il rumore pepe avendo questo rumore valori molto bassi.

  il *minimo* invece si ottiene utilizzando il *primo* valore percentile:
  $$\hat{f}(x,y) = \underset{(s,t)\epsilon S_{xy}}{min} \{g(s,t)\}$$

Serve per trovare i punti più scuri di un'immagine e permette di ridurre il rumore sale avendo questo rumore valori molto alti.

- *filtro di media alpha-trimmed* (*alfa-bilanciato*):
  è utile quando nell'immagine abbiamo forme di rumore multiple. Viene utilizzato quando vogliamo cancellare i *d\2* più bassi e *d\2* più alti valori di intensità di *g(s,t)* nell'intorno $S_{xy}$. Assumiamo che $g_r(s,t)$ rappresenti i rimanenti *mn-d* pixel; il nostro filtro è formato dalla media di questi pixel rimanenti:
  $$\hat{f}(x,y) = \frac{1}{mn-d} \sum_{(s,t)\epsilon S_{xy}} g_r(s,t)$$

***filtri adattivi***
sono più potenti, ma di maggiore complessità.
vediamone due esempi:

- *filtro adattivo locale di riduzione del rumore*:
  si basa sulla media e sulla varianza in quanto sono legate all'aspetto di un'immagine, infatti la *media* fornisce la misura dell'intensità media nella regione in cui viene calcolata e la *varianza* fornisce una misura di contrasto.
  L'espressione che caratterizza questo tipo di filtro è:
  $$\hat{f}(x,y) = g(x,y) - \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_L^2}[g(x,y) - m_L]$$
  dove *g(x,y)* è il valore dell'immagine rumorosa in (*x,y*); $\sigma_\eta^2$ la varianza del rumore di cui è affetta *f(x,y)* per generare *g(x,y)*; $m_L$ la media locale dei pixel in $S_{xy}$; $\sigma_L^2$ la varianza locale dei pixel in $S_{xy}$.
  Il risultato che restituisce dipende dal valore delle due varianze.

- *filtro mediano adattivo*:
  riesce a gestire il rumore a impulsi anche con probabilità maggiori di *0,2*. Un'altra caratteristica è che preserva i dettagli mentre riduce il rumore non a impulsi; quindi entrambe cose che il filtro di media tradizionale non riesce a fare.
  Questo filtro cambia le dimensioni di $S_{xy}$, durante l'operazione di filtraggio, al verificarsi di determinate condizioni.

## Stima della funzione di degrado
La stima della funzione di degrado serve per restaurare un'immagine, questo processo viene chiamato deconvoluzione cieca, a causa del fatto che la vera funzione di degrado è raramente nota.
E' possibile stimare la funzione di degrado citata prima in tre modi:

1. *stima mediante osservazione diretta*:
   partendo dall'ipotesi che l'immagine sia stata degradata da un processo lineare invariante per posizione, si può cercare di calcolare *H* raccogliendo informazioni dall'immagine stessa.
   Quindi:
   $$H_s(u,v) = \frac{G_s(u,v)}{\hat{F}_s(u,v)}$$
   dove $g_s(x,y)$ è la sottoimmagine ed $\hat{f}_s(x,y)$ la sottoimmagine elaborata, cioè la nostra stima dell'immagine originale in quell'area.

2. *stima mediante sperimentazione*:
   lo scopo è quello di ottenere la risposta all'impulso del degrado acquisendo un impulso utilizzando gli stessi sistemi; poiché, come già visto in precedenza, un sistema lineare invariante spazialmente è completamente caratterizzato dalla sua risposta all'impulso. L'impulso è simulato da un punto di luce, più luminoso possibile per ridurre gli effetti del rumore a valori trascurabili. L'equazione della stima quindi è:
   $$H(u,v) = \frac{G(u,v)}{A}$$
   dove *G* è la trasformata di Fourier dell'immagine osservata e *A* una costante che descrive la forza dell'impulso.

3. *stima tramite modelli*:
   lo scopo è quello di derivate un modello matematico che parte da principi di base. Ad esempio si può tenere conto delle condizioni ambientali che provocano i vari tipi di degrado, tenendo conto delle caratteristiche fisiche della turbolenza atmosferica.

## Filtraggio Inverso

Una volta stimata la funzione di degrado possiamo restaurare l'immagine degradata tramite il filtraggio inverso diretto. Questo metodo calcola una stima $\hat{F}(u,v)$, della trasformata dell'immagine originale dividendo la trasformata dell'immagine degradata $G(u,v)$ per la funzione di degrado:
$$\hat{F}(u,v) = \frac{G(u,v)}{H(u,v)}$$
L'equazione si può scrivere anche in questo modo:
$$\hat{F}(u,v) = F(u,v) + \frac{N(u,v)}{H(u,v)}$$
dove notiamo che pur conoscendo la funzione di degrado non riusciamo a ripristinare l'immagine non degradata, perche *N(u,v)* non è noto.
Inoltre se la funzione di degrado ha valori nulli o molto piccoli il rapporto $N(u,v)/H(u,v)$ domina rispetto al valore di $\hat{F}(u,v)$. Per risolvere questo problema si limitano le frequenze del filtro a valori vicini all'origine, perche *H(0,0)* è solitamente il valore più alto di *H(u,v)* nel dominio della frequenza; quindi limitando l'analisi a frequenze vicine all'origine riduciamo la probabilità di incontrare valori nulli.

## Filtraggio che minimizza l'errore quadratico medio (filtro di Wiener)

Questo tipo di filtraggio ingloba la funzione di degrado e le caratteristiche statistiche del rumore nel processo di restauro.
Il metodo considera le immagini ed il rumore come variabili casuali e cerca di trovare un valore $\hat{f}$ dell'immagine non corrotta *f* tale che l'errore quadratico medio tra di essi sia minimo.
Si assume che il rumore e l'immagine non siano correlate, che l'uno o l'altra abbia media nulla e che i livelli di intensità nella stima siano una funzione lineare dei livelli nell'immagine degradata.
Il filtro di Wiener non presenta lo stesso problema del filtro inverso con degli zeri nella funzione di degrado, a meno che l'intero denominatore sia zero per gli stessi valori di *u* e *v*.
L'immagine restaurata nel dominio spaziale è data dalla trasformata di Fourier inversa del valore nel dominio della frequenza $\hat{F}(u,v)$.
Se il rumore è zero, allora lo spettro di potenza del rumore si annulla e il filtro di Wiener si riduce al filtro inverso.

Il *rapporto segnale-rumore (SNR)* è una delle misure che si basano sullo spettro di potenza del rumore e dell'immagine non degradata.

$$SNR = \frac{\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}|F(u,v)|^2}{\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}|N(u,v)|^2}$$

Questo rapporto fornisce una misura del livello di informazione che trasporta la potenza del segnale (immagine originale non degradata) al livello della potenza del rumore.
Nel dominio spaziale è possibile definire il rapporto segnale-rumore considerando l'immagine restaurata come un "segnale" e la differenza tra questa immagine e l'originale come rumore.

## Filtraggio ai minimi quadrati vincolati

Il problema del filtro di Wiener è che *H(u, v)* e lo spettro dell'immagine non degradata e del rumore devono essere noti, mentre il filtraggio ai minimi quadrati vincolati richiede soltanto di conoscere, oltre ad *H(u, v)*, la media e la varianza del rumore e permette di ottenere un risultato ottimale per ogni immagine a cui è applicato.
Possiamo esprimere:

$$g(x,y) = h(x,y) \star f(x,y) + \eta(x,y)$$

In forma matriciale:

$$g = Hf + \eta$$

Se l'immagine ha *MxN* pixel, allora $g$ è un vettore di lunghezza *MxN* ottenuto concatenando i pixel di $g(x,y)$; η è un vettore di lunghezza *MxN* ottenuto concatenando i pixel di $\eta(x,y)$; *H* è una matrice di dimensione *(MN)x(MN)*.
Potremmo quindi arrivare alla conclusione che il problema del restauro possa essere ridotto a semplici manipolazioni matriciali, ma sfortunatamente non è così, in quanto le dimensioni dei vettori e delle matrici diventano troppo grandi.
La caratteristica centrale di questo metodo è la sensibilità di *H* al rumore; un modo per ridurre questa sensibilità è rendere il restauro ottimale tramite una misura della sfocatura, come ad esempio la derivata seconda di un'immagine cioè il laplaciano.
Per essere significativo, il restauro deve essere limitato dai parametri dei problemi da affrontare. Quindi si vuole trovare il minimo di una funzione criterio C definita come:

$$C = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}[\nabla^2 f(x,y)]^2$$

soggetta ai vincoli:

$$\left\|g - H\hat{f}\right\|^2 = \|\eta\|^2$$

dove $\hat{f}$ è il valore dell'immagine non degradata.
La soluzione nel dominio della frequenza è data dall'espressione

$$\hat{F}(u,v) = \left[\frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2 + \gamma|P(u,v)|^2}\right]G(u,v)$$

dove $\gamma$ è un parametro che deve essere regolato in modo tale che venga soddisfatto il vincolo mostrato sopra; $P(u,v)$ è la trasformata di Fourier della funzione

$$p(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

che è appunto l'operatore laplaciano.
Il parametro $\gamma$ è un valore scalare, mentre il valore K, presente nel filtraggio di Wiener, è un'approssimazione del rapporto di due funzioni non note nel dominio della frequenza; questo rapporto

difficilmente è costante. Quindi basandosi sulla scelta manuale di $\gamma$ si riesce a ottenere una stima più accurata dell'immagine degradata.
In generale, i filtri di restauro determinati in automatica portano a risultati inferiori rispetto alla regolazione manuale dei parametri del filtro.

### Filtro di media geometrica

Questo filtro è la generalizzazione del filtro di Wiener. Contiene due costanti $\alpha$ e $\beta$ reali positive; al variare di queste due variabili otteniamo:
$\alpha = 0$ diventa filtro di Wiener parametrico
$\alpha = 1$ diventa filtro inverso
$\beta = 1$ diventa filtro di Wiener standard