Capitolo 9
LA MORFOLOGIA APPLICATA ALLE IMMAGINI DIGITALI

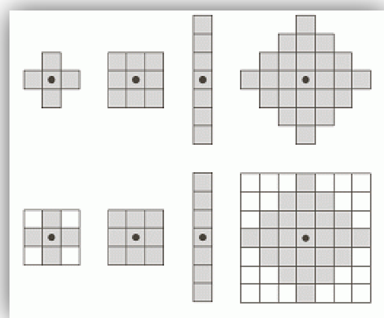
La morfologia è una branca della biologia che ha a che fare con la forma degli animali e delle piante; nel nostro caso è un mezzo che ci serve per estrarre delle componenti di interesse da delle immagini di input e poter quindi rappresentare e descrivere regioni, bordi e superfici. Inoltre si utilizzano delle tecniche morfologiche per realizzare pre o post elaborazioni, come ad esempio il filtraggio morfologico o l'assottigliamento.
Il linguaggio della morfologia matematica fa parte della teoria degli insiemi e nel nostro caso rappresentano degli oggetti all'interno di un'immagine.
Nelle immagini binarie questi insiemi sono membri dello spazio degli interi 2-D cioè Z^2, dove ogni elemento di un insieme è una tupla (vettore 2-D) le cui coordinate sono le coordinate (x, y) di un pixel bianco (o nero, a seconda della convenzione) dell'immagine.
Le immagini in scala di grigio possono essere rappresentate come insiemi le cui componenti si trovano in Z^3; due componenti di ogni elemento dell'insieme fanno riferimento alle coordinate di un pixel mentre la terza corrisponde al valore discreto di intensità.
In morfologia due concetti fondamentali e molto usati sono:

- <u>*Riflessione*</u>:
  indicata con $\hat{B}$ è definita:
  $$\hat{B} = \{w | w = -b, \qquad \text{per } b \in B\}$$
  in sostanza se B è l'insieme dei pixel che rappresentano un oggetto in un'immagine, allora $\hat{B}$ è l'insieme dei punti in B le cui coordinate (x, y) sono state sostituite da ($-x, -y$).

- <u>*Traslazione*</u>:
  di un insieme B tramite un punto $z = (z_1, z_2)$ e indicata con $(B)_z$ è definita:
  $$(B_z) = \{c | c = b + z, \qquad \text{per } b \in B\}$$
  in sostanza se B è l'insieme dei pixel che rappresentano un oggetto di un'immagine, allora $(B)_z$ è l'insieme dei punti in B le cui coordinate (x, y) sono state sostituite da ($x+z_1$, $y+z_2$).

Questi due concetti vengono utilizzati per realizzare operazioni basate sugli **elementi strutturanti (SE)**, cioè piccoli insiemi o sottoimmagini usati per esplorare un'immagine riguardo alle proprietà di interesse. Di questi elementi strutturanti bisogna specificare l'*origine*, che solitamente si fa coincidere con il baricentro, ma non obbligatoriamente. Per quanto riguarda la *forma* di questi SE è necessario che siano racchiusi in una matrice rettangolare che faccia uso della minor quantità possibile di elementi di sfondo, che risultano necessari per poter formare l'area rettangolare. Quando si fa scorrere un elemento strutturante in un'immagine è necessario effettuare del padding in quanto il bordo dello sfondo deve essere grande abbastanza da ospitare l'intero elemento strutturante quando la sua origine si trova sul bordo dell'insieme originale.
Per determinare se un certo elemento strutturante è *contenuto* in un insieme oppure no si considerano solo gli elementi ombreggiati di entrambi gli insiemi, cioè non si considera lo sfondo introdotto per fare in modo che l'elemento strutturante abbia forma rettangolare.

Nell'immagine a fianco ne vediamo un esempio:



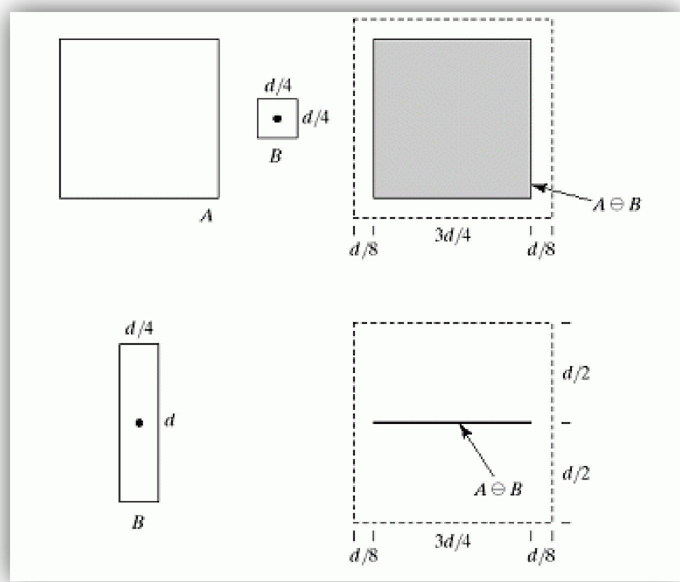
Nella prima riga è mostrato un elemento strutturante.
Nella seconda riga gli elementi strutturanti sono trasformati in matrici rettangolari.
I punti indicano i centri degli SE.

Erosione e Dilatazione

Le due operazioni primitive su cui si basano tutti gli algoritmi che vedremo sono:

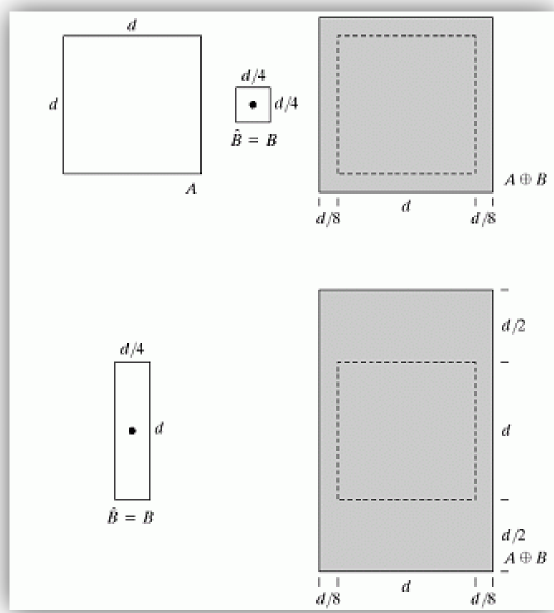
1. ***Erosione***:
   questa operazione di filtraggio morfologico viene utilizzata per eliminare o assottigliare gli oggetti in un'immagine binaria; i dettagli dell'immagine che vengono eliminati sono quelli *più piccoli* dell'elemento strutturante.
   Matematicamente parlando, se *A* e *B* sono due insiemi in Z^2, l'erosione di *A* attraverso *B* è indicata con $A \ominus B$ ed è definita:
   $$A \ominus B = \{z|(B)_z \subseteq A\}$$
   quindi l'erosione di *A* attraverso *B* è l'insieme di tutti i punti *z* tali che *B* traslato sia contenuto in *A*. *B* deve essere completamente contenuto in *A* quindi non deve avere elementi in comune con lo sfondo.

   Vediamo un semplice esempio:



2. ***Dilatazione***:
   questa operazione di filtraggio morfologico viene utilizzata per accrescere e ispessire gli oggetti in un'immagine binaria; le dimensioni dell'ispessimento dipendono dalla forma dell'elemento strutturante. Una delle applicazioni più semplici di questa operazione è il riempimento dei vuoti, che rispetto al filtro low pass ha anche il vantaggio di restituire direttamente un'immagine binaria. Matematicamente parlando, se *A* e *B* sono due insiemi in Z^2, la dilatazione di *A* attraverso *B* è indicata con $A \oplus B$ ed è definita:
   $$A \oplus B = \left\{z| \left[\left(\hat{B}\right)_z \cap A\right] \subseteq A\right\}$$
   questa equazione si basa sulla riflessione di *B* rispetto alla sua origine e sulla traslazione di questa riflessione attraverso *z*.
   Quindi la dilatazione di *A* attraverso *B* è l'insieme di tutti gli spostamenti *z*, tali che $\hat{B}$ ed *A* si sovrappongano almeno per un elemento.

   Vediamo un semplice esempio in figura:



Dualità
Queste due operazioni sono duali l'una dell'altra rispetto al complementare e alla riflessione di un insieme:

$$(A \ominus B)^C = A^C \oplus \hat{B}$$

$$(A \oplus B)^C = A^C \ominus \hat{B}$$

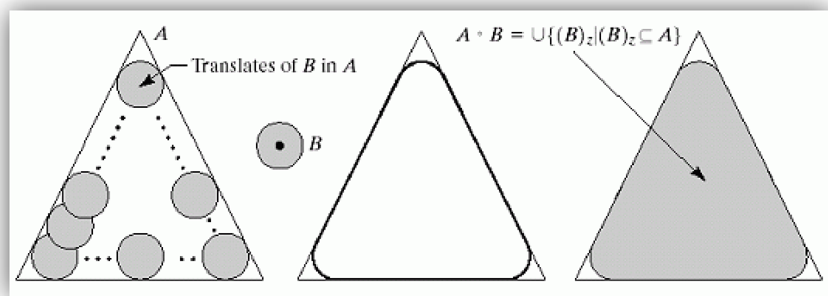
la dualità è utile quando l'elemento strutturante è simmetrico rispetto alla sua origine, quindi $B = \hat{B}$, perché possiamo ottenere l'erosione di un'immagine attraverso *B* dilatando lo sfondo A^c con lo stesso elemento strutturante e complementando il risultato.

Apertura e Chiusura
Altre due importanti operazioni morfologiche derivanti dalla dilatazione e dall'erosione sono:

1. ***Apertura***:
   rende più omogenei i contorni di un oggetto, elimina le piccole interruzioni e le protuberanze sottili. L'apertura di un insieme *A* attraverso un elemento strutturante *B* è indicata con $A \circ B$ ed è definita:

   $$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$

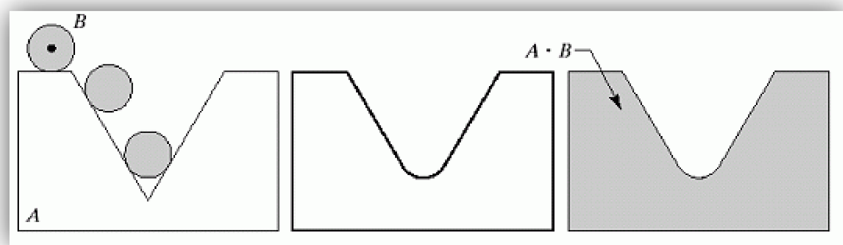
   quindi l'apertura è semplicemente l'erosione di *A* attraverso *B*, seguita dalla dilatazione del risultato attraverso *B*.
   L'*interpretazione geometrica* dell'apertura è la seguente:
   l'elemento strutturante *B* è una palla ruotante piatta che gira all'interno di *A*. Il contorno dell'immagine $A \circ B$ è definito dai punti in *B* che raggiungono il *punto più lontano* nel bordo di *A* mentre gira all'interno del suo confine.



2. ***Chiusura***:
   rende più omogenee le sezioni del contorno, fonde le interruzioni sottili, elimina piccoli vuoti, riempie vuoti nel contorno.
   La chiusura di un insieme A attraverso un elemento strutturante B è indicata con $A \cdot B$ ed è definita:

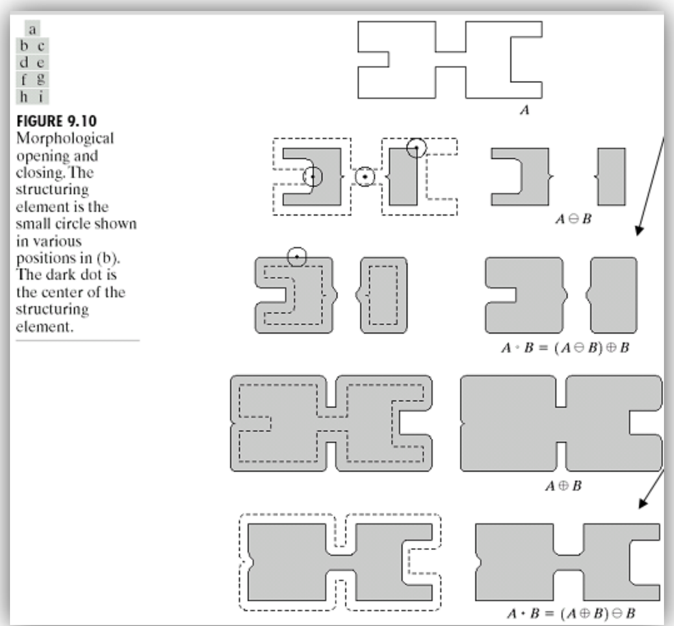
$$A \cdot B = (A \oplus B) \ominus B$$

   quindi la chiusura di *A* attraverso *B* è semplicemente la dilatazione di *A* attraverso *B*, seguita dall'erosione del risultato attraverso *B*.
   L'*interpretazione geometrica* della chiusura è simile a quella dell'apertura con la differenza che la palla (l'elemento strutturante B) ruota sul lato esterno del contorno.



Da notare che aperture e chiusure multiple di un insieme non hanno effetto dopo che l'operatore è stato applicato una volta.

Vediamo un esempio di applicazione delle due operazioni sopra citate:



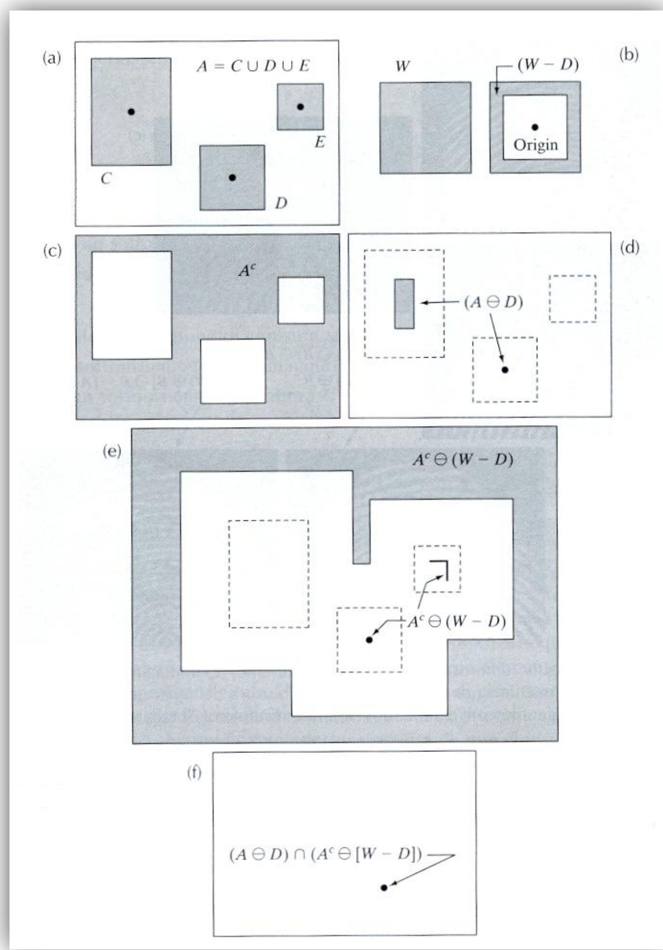
Apertura: immagini da (a) a (e). Gli effetti sono:
- *Eliminazione del ponte tra le due sezioni principali*
- *Eliminazione delle protuberanze esterne dell'elemento di destra*
- *Smussamento degli angoli che puntano all'esterno; gli angoli interni invece non sono influenzati*

Chiusura: immagini da (f) a (i). Gli effetti sono:
- *Il vuoto interno nella sezione di sinistra è stata ridotta*
- *Smussamento degli angoli interni; gli angoli esterni non sono influenzati*

In entrambi i casi provoca smoothing.

Trasformazioni hit - or - miss

Questa trasformazione morfologica è fondamentale per l'individuazione della forma. Ne vediamo le caratteristiche principali tramite un esempio.



La figura mostra un insieme A che contiene tre forme (sottoinsiemi), indicate con *C*, *D* ed *E*. Le ombreggiature nelle figure *a* e *c* indicano gli insiemi originali, mentre quelle nelle figure *d* ed *e* indicano il risultato di operazioni morfologiche.

L'obiettivo in questo esempio è quello di trovare la posizione della forma *D*.

Assumiamo che l'origine di ogni forma coincida con il suo centro di gravità; assumiamo inoltre che *D* sia racchiusa da una piccola finestra *W*. Lo *sfondo locale* di *D* rispetto a *W* è definito come l'insieme differenza (*W* - *D*), come mostra l'immagine *b*.

La figura *c* mostra il complemento di *a*.

La figura *d* mostra l'erosione di *A* attraverso *D* ($A \ominus D$), cioè l'insieme delle posizioni dell'origine di *D* alle quali *D* ha trovato un abbinamento (*hit*) in *A*.

La figura *e* mostra l'erosione del complemento di *A* attraverso l'insieme dello sfondo locale (*W* – *D*), la regione ombreggiata è parte dell'erosione.

Dalle figure *d* ed *e* notiamo che l'insieme delle posizioni per cui *D* coincide esattamente in *A* è l'intersezione dell'erosione di *A* attraverso *D* con l'erosione di A^C attraverso (*W* – *D*), come mostra la figura *f*.

L'intersezione è la posizione cercata.

Quindi matematicamente parlando, l'accoppiamento di *B* (insieme composto da *D* e dal suo sfondo) in *A* è dato da:

$$A \circledast B = (A \ominus D) \cap (A^c \ominus (W - D))$$

Generalizzando possiamo porre $B = (B_1, B_2)$, dove B_1 è l'insieme formato dagli elementi di *B* associati ad un oggetto e B_2 è l'insieme degli elementi di *B* associati allo sfondo corrispondente. Quindi nel nostro caso avremo che $B_1 = D$ e $B_2 = (W - D)$, sostituendo nella precedente equazione otteniamo:

$$A \circledast B = (A \ominus B_1) \cap (A^c \ominus B_2)$$

Quindi, l'insieme $A \circledast B$ contiene tutti i punti (origine) ai quali, simultaneamente, B_1 ha trovato un accoppiamento (hit) in A e B_2 ha trovato un accoppiamento in A^c.

Ciascuna delle due equazioni è una *trasformazione morfologica hit-or-miss*.

L'associazione dei due elementi strutturanti B_1 e B_2 rispettivamente ai dati oggetti e allo sfondo si basa sull'assunzione che due o più oggetti sono distinti solo se essi formano insiemi disgiunti (disconnessi); ciò viene garantito richiedendo che ogni oggetto abbia uno sfondo di almeno un pixel attorno ad esso. In alcune situazioni, la trasformazione hit-or-miss si riduce alla semplice erosione.

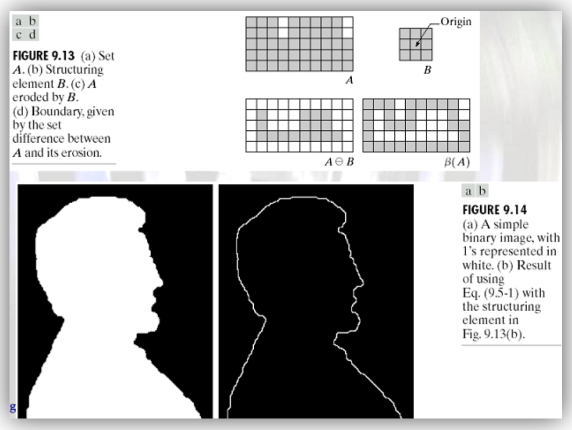
Algoritmi morfologici fondamentali

Ora vediamo un elenco di alcuni algoritmi morfologici:

- ***Estrazione di contorni***:
  il bordo di un insieme *A*, indicato con *β(A)* si ottiene erodendo *A* attraverso *B* e poi applicando la differenza insiemistica tra *A* e la sua erosione. Quindi:

$$\beta(A) = A - (A \ominus B)$$

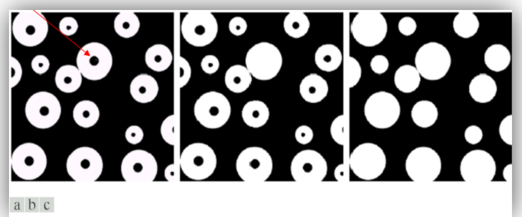
  dove ovviamente *B* è l'elemento strutturante.
  Vediamo un esempio:



- ***Riempimento di vuoti***:
  un vuoto è una regione di sfondo circondata da un bordo connesso di pixel del foreground, cioè del primo piano.
  La formula che permette di riempire tutti i vuoti è la seguente:

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^C \quad k = 1,2,3, \dots$$

  l'algoritmo termina quando $X_{k-1} = X_k$. Dove *B* è l'elemento strutturante; X_k è l'insieme che contiene tutti i vuoti riempiti; *X* è una matrice che contiene tutti valori *0*, tranne nel punto di vuoto che viene posto a *1*; l'unione degli insiemi X_k e *A* contiene tutti i vuoti riempiti e i loro bordi, cioè il risultato che volevamo ottenere.
  Quindi per poter riempire i vuoti facciamo uso della dilatazione, dell'intersezione del risultato con il complementare di *A* ed infine dell'unione del risultato con *A*.
  Vediamo un esempio:



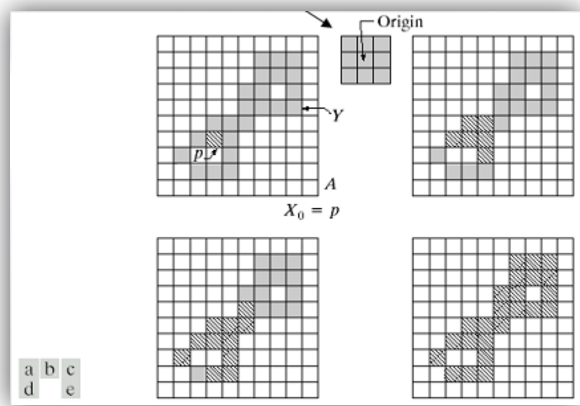
(a) Immagine binaria. Il punto bianco all'interno di una delle regioni(indicato dalla freccia rossa) è il punto di partenza per l'algoritmo di riempimento dei vuoti.
(b) Il risultato di riempimento di quella regione.
(c) Risultato del riempimento di tutti i vuoti.

- ***Estrazione di componenti connesse****:*
  questo algoritmo serve per estrarre le componenti connesse da un'immagine binaria ed è fondamentale in molte applicazioni automatizzate di analisi dell'immagine.
  I concetti da utilizzare sono molto simili a quelli visti per il riempimento di vuoti, con l'unica differenza che ora si utilizza *A*, invece del suo complementare.

In dettaglio abbiamo un insieme *A* contenente una o più componenti connesse; un elemento strutturante basato sulla *8-connettività* tra pixel, altrimenti non potremmo trovare le componenti connesse in diagonale; una matrice X_0 i cui elementi hanno valore *0* (valori di sfondo), tranne nella posizione che corrisponde ad un punto di ogni componente connessa in *A*, a cui assegniamo valore *1* (valore di primo piano). Partendo da X_0 è possibile individuare tutte le componenti connesse di *A*, tramite la seguente procedura iterativa:

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A \quad k = 1,2,3, \dots$$

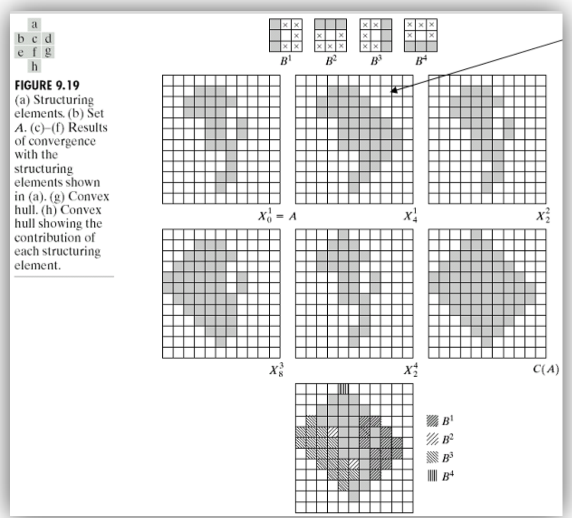
l'algoritmo termina quando $X_{k-1} = X_k$. Dove *B* è l'elemento strutturante; X_k è l'insieme che contiene tutte le componenti connesse di *A*. In questo algoritmo non utilizziamo l'immagine complementare perché stiamo cercando punti in primo piano, l'opposto di quello che facevamo nel riempimento di vuoti, dove cercavamo punti di sfondo.
Vediamo un esempio:



(a) *matrice iniziale contenente un valore 1 nella regione della componente connessa. (tutti i punti grigi hanno valore 1, ma sono rappresentati in modo diverso perché non sono ancora stati trovati dall'algoritmo)*
(b) *Elemento strutturante*
(c) *Risultato del primo passo iterativo*
(d) *Risultato del secondo passo*
(e) *Risultato finale*

- ***Involucro convesso (scorza)***:
  Innanzitutto ricordiamo che un insieme *A* è *convesso* se il segmento lineare che unisce due punti qualsiasi di *A* giace interamente all'interno di *A*. Quindi l'*involucro convesso H* di un insieme arbitrario *S* è il più piccolo insieme convesso contenente *S*. La *differenza convessa* di *S* è data da *H - S*. Il metodo per ottenere l'involucro convesso consiste nell'applicazione iterativa della trasformazione hit-or-miss su *A* con B^i con *i=1*, dove *B* è un elemento strutturante; quando non si verificano ulteriori cambiamenti, si applica l'unione con *A* ottenendo come risultato D^1. La procedura viene ripetuta con tutti i *B* finché non si verificheranno cambiamenti. L'unione degli insiemi *D* risultanti costituisce l'involucro convesso di *A*.
  Vediamo un esempio:

(a) *Elementi strutturanti (le X indicano condizioni trascurabili)*
(b) *Insieme*
(c) – (f) *risultati dell'algoritmo con gli elementi strutturanti mostrati in (a)*
(g) *Involucro convesso*
(h) *Involucro convesso che mostra il contributo di ogni elemento strutturante*



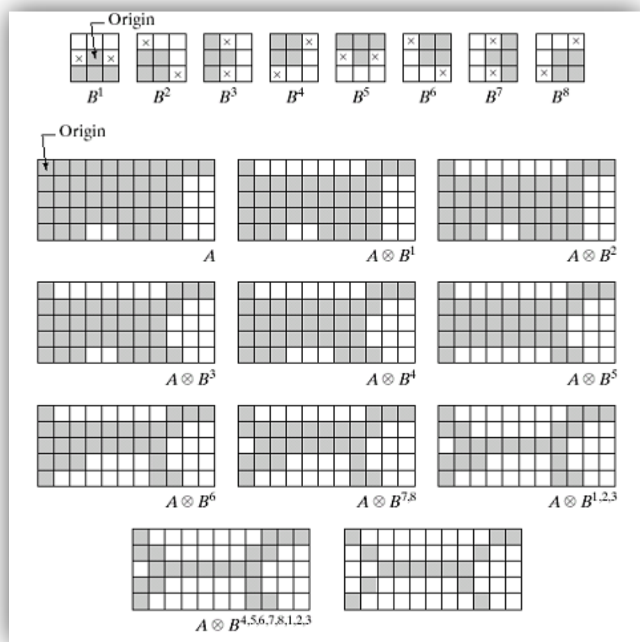
- ***Assottigliamento***:
  L'assottigliamento di un insieme A attraverso un elemento strutturante B, indicato con $A \otimes B$, può essere definito utilizzando una trasformazione hit-or-miss:

$$A \otimes B = A - (A \circledast B) = A \cap (A \circledast B)^C$$

E' possibile definire l'assottigliamento anche attraverso una sequenza di elementi strutturanti in questo modo:

$$A \otimes \{B\} = \left(\left(\ldots\left((A \otimes B^1) \otimes B^2\right)\ldots\right) \otimes B^n\right)$$

il processo in questo caso consiste nell'assottigliare *A* attraverso un passaggio con B^1, poi assottigliare il risultato con B^2 e così via fino a B^n. L'intero processo viene ripetuto finché non si verificheranno ulteriori cambiamenti.
Vediamo un esempio:



(a) Sequenza di elementi strutturanti ruotati utilizzati per l'assottigliamento
(b) Insieme A
(c) Risultato dell'assottigliamento con il primo elemento
(d) – (i) risultati di assottigliamento con i successivi sette elementi (notiamo che tra il settimo e l'ottavo non è avvenuto cambiamento)
(j) Risultato dell'ulteriore ripetizione dell'uso dei primi quattro elementi
(k) Risultato dopo la convergenza
(l) Conversione alla m-connettività

- ***Ricostruzione morfologica***:
  In questo tipo di algoritmo abbiamo due immagini (marker; maschera) ed un elemento strutturante, a differenza dei metodi visti finora che implicavano la presenza di una immagine ed un elemento strutturante.
  Il *marker* è l'immagine che contiene i punti iniziali per la trasformazione; la *maschera* invece vincola la trasformazione; l'elemento strutturante è usato per definire la connettività.
  Le due operazioni principali per la ricostruzione morfologica sono (in entrambi i casi denotiamo *F* l'immagine marker, *G* l'immagine maschera e $F \subseteq G$.):

1) <u>*Dilatazione geodetica*</u>:
   di taglia *1* dell'immagine marker rispetto alla maschera è indicata con $D_G^{(1)}(F) = F$ ed è definita come:

$$D_G^1(F) = (F \oplus B) \cap G$$

   dove l'operazione di intersezione garantisce che la maschera *G* limiti la crescita (dilatazione) del marker *F*.

Vediamo un esempio:

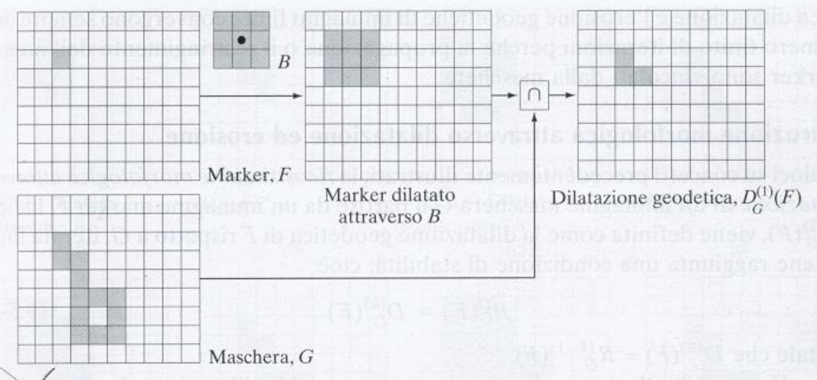


Figura 9.26 Illustrazione della dilatazione geodetica.

2) *Erosione geodetica*:
di taglia *1* dell'immagine marker rispetto alla maschera è indicata con $E_G^{(1)}(F) = F$ ed è definita come:

$$E_G^1(F) = (F \ominus B) \cup G$$

dove l'operazione di unione garantisce che l'erosione geodetica di un'immagine rimanga maggiore o uguale alla sua immagine maschera.
Vediamo un esempio:

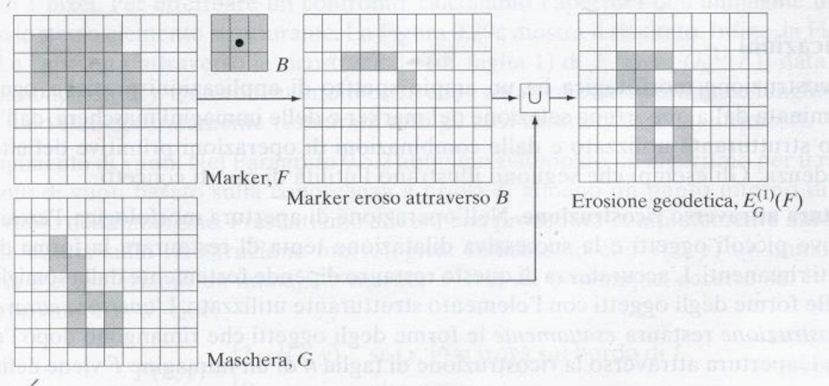


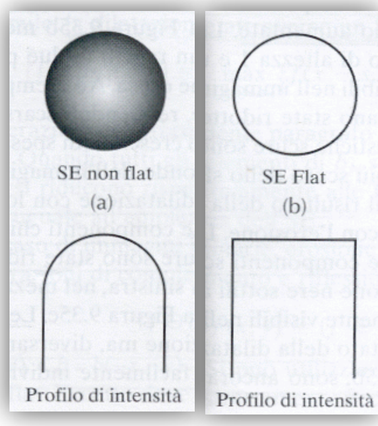
Figura 9.27 Illustrazione dell'erosione geodetica.

Come nel caso classico queste due operazioni sono duali rispetto all'insieme complementare.

Morfologia in scala di grigio

La morfologia in scala di grigio è un'estensione dei concetti visti finora alle immagini in scala di grigio. In questo caso l'immagine viene denotata con *f(x,y)* mentre l'elemento strutturante con *b(x,y)*, dove *f* e *b* assegnano un valore di intensità ad ogni coppia distinta di coordinate (*x, y*).
Gli elementi strutturanti, come nella controparte binaria, vengono utilizzati come sonde per esaminare un'immagine riguardo a proprietà specifiche. In questo contesto però ci sono due categorie di elementi strutturanti:

- *Non piatte* (non flat):
- *Piatte* (flat):



La *riflessione* di un elemento strutturante in scala di grigio è indicata con $\hat{b}(x,y) = b(-x,-y)$.

Erosione e dilatazione

Anche in questo caso le operazioni fondamentali da cui partono tutti gli algoritmi sono la dilatazione e l'erosione (anche se bisogna distinguere tra flat e non flat), vediamole in dettaglio:

- <u>*Erosione in scala di grigio (flat)*</u>:
  l'erosione di *f* attraverso un elemento strutturante flat *b* è definita per ogni posizione (*x, y*) come il valore *minimo* dell'immagine nella regione coincidente con *b*, quando l'origine di *b* si trova in (*x, y*).
  In formula:

  $$[f \ominus b](x,y) = \min_{(s,t) \in b} \{f(x+s, y+t)\}$$

  dove *x* e *y* vengono incrementati per fare in modo che l'origine di *b* visiti ogni pixel di *f*. Quindi l'origine dell'elemento strutturante si posiziona in ogni posizione dei pixel dell'immagine. L'erosione seleziona il valore minimo di *f* da tutti i valori di *f* contenuti nella regione coincidente.

  Applicando l'erosione in scala di grigio otteniamo un'immagine più scura dell'originale, in quanto le dimensioni delle componenti chiare vengono ridotte e le dimensioni delle componenti scure vengono aumentate (infatti si calcola il minimo).

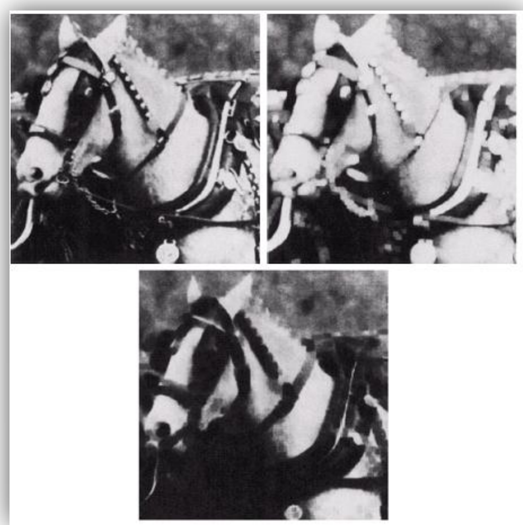
- <u>*Dilatazione in scala di grigio (flat)*</u>:
  la dilatazione di *f* attraverso un elemento strutturante flat *b* è definita per ogni posizione (*x, y*) come il valore *massimo* dell'immagine nella finestra indicata da $\hat{b}$ quando l'origine di $\hat{b}$ si trova in (*x, y*).
  In formula:

  $$[f \oplus b](x,y) = \max_{(s,t) \in b} \{f(x-s, y-t)\}$$

  dove $\hat{b}$ = *b(-x, -y)* e l'elemento strutturante è riflesso rispetto alla sua origine.

  Applicando un'erosione in scala di grigio otteniamo un'immagine più chiara dell'originale, in quanto le componenti chiare si sono ispessite e le componenti scure vengono ridotte (infatti si calcola il massimo).

Vediamo un esempio:



(a) Immagine originale
(b) Risultato della dilatazione (più chiara)
(c) Risultato dell'erosione (più scura)

Gli elementi strutturanti non flat hanno una maggiore complessità computazionale ed hanno valori in scala di grigio che variano rispetto al loro dominio di definizione, inoltre vengono utilizzati raramente nella pratica.

- *Erosione in scala di grigio (non flat)*:
  questo tipo di erosione è definita:

$$[f \ominus b_N](x,y) = \min_{(s,t) \in b_N} \{f(x+s, y+t) - b_N(s,t)\}$$

quindi si sottraggono da *f* i valori per determinare l'erosione in un punto qualsiasi, quindi l'erosione non è limitata dai valori di *f*, cosa che avviene nella versione flat.

- *Dilatazione in scala di grigio (non flat)*:

$$[f \oplus b_N](x,y) = \max_{(s,t) \in b_N} \{f(x-s, y-t) + b_N(s,t)\}$$

In entrambi i casi quando tutti gli elementi di b_N sono costanti queste due equazioni diventano come quelle flat, con una costante scalare uguale all'ampiezza dell'elemento strutturante.

Apertura e Chiusura
Anche in questo contesto avremo le operazioni di apertura e chiusura:

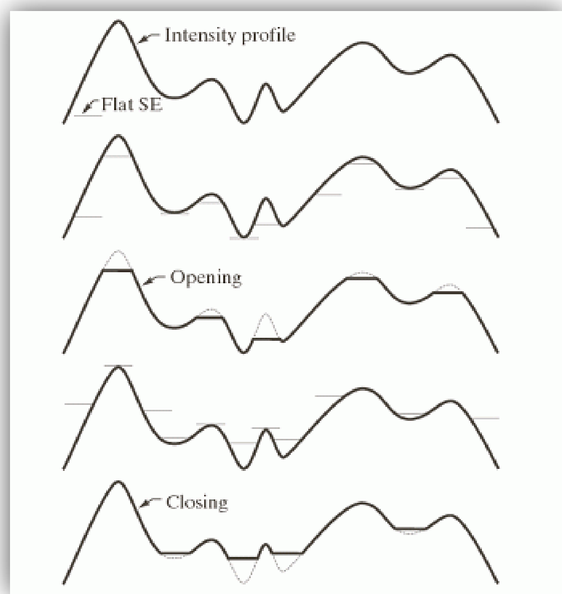
- *Apertura in scala di grigio*:
  di un'immagine *f* attraverso un elemento strutturante *b* è indicata con $f \circ b$ ed è

$$f \circ b = (f \ominus b) \oplus b$$

dove, come nella controparte binaria, è l'erosione di *f* attraverso *b*, seguita da una dilatazione del risultato con *b*.

- *Chiusura in scala di grigio*:
  di un'immagine *f* attraverso un elemento strutturante *b* è indicata con $f \cdot b$ ed è
  $$f \cdot b = (f \oplus b) \ominus b$$
  dove, come nella controparte binaria, è la dilatazione di *f* attraverso *b*, seguita da una erosione del risultato con *b*.

La proprietà di dualità della controparte binaria vale anche in questo contesto, mentre varia l'interpretazione geometrica:
in pratica la funzione immagine *f(x, y)* viene vista come una superficie 3-D con i suoi valori di intensità interpretati come valori di altezza sul piano *xy*, quindi l'apertura viene vista come la spinta dell'elemento strutturante dal basso verso l'alto sulla superficie di *f*, perciò l'apertura completa è l'insieme di tutti quei valori ottenuti facendo sì che l'origine di *b* visiti ogni coordinata (*x, y*) di *f*.
Ecco un esempio chiarificatore:



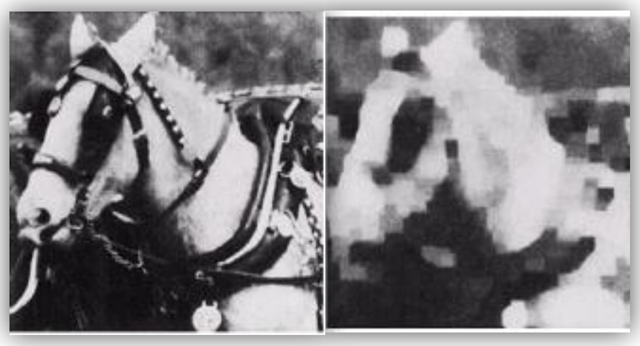
Apertura e Chiusura nel caso monodimensionale.
(a) Segnale originale 1-D
(b) Elemento strutturante flat sospinto sotto il segnale
(c) Apertura
(d) Elemento strutturante flat pressato lungo la parte superiore del segnale
(e) chiusura

Dall'immagine si nota che (nel caso dell'apertura) quando l'elemento strutturante è troppo ampio per adattarsi completamente all'interno delle punte superiori della curva, le estremità superiori delle punte sono eliminate; la parte rimossa è proporzionale alla capacità dell'elemento strutturante di stare all'interno della punta.
Nel caso della chiusura ovviamente accade l'opposto, cioè l'elemento strutturante viene pressato sulla parte superiore della curva mentre viene spostato.

Algoritmi morfologici di base in scala di grigio
Ora vediamo un elenco di alcuni algoritmi morfologici in scala di grigio:

- **Smoothing morfologico**:
  abbiamo visto che l'apertura e la chiusura permettono rispettivamente di eliminare i dettagli chiari e i dettagli scuri, quindi posso essere utilizzate come filtri morfologici per lo smoothing dell'immagine e la riduzione del rumore.

A volte lo smoothing si ottiene tramite un *filtraggio sequenziale alternante*, cioè viene applicata la sequenza apertura-chiusura inizialmente con l'immagine originale, ma i passaggi successivi sui risultati dei passi precedenti.
Vediamo un esempio:

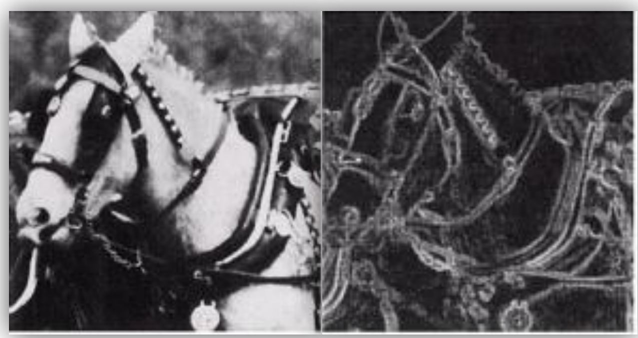


(a) Immagine originale
(b) Smoothing morfologico dell'immagine (a)

- **Gradiente morfologico**:
  è possibile ottenere il gradiente morfologico tramite la dilatazione e l'erosione combinate con la sottrazione dell'immagine:

$$g = (f \oplus b) - (f \ominus b)$$

infatti la dilatazione ispessisce le regioni, l'erosione le rimpicciolisce e la loro differenza permette di enfatizzare i contorni delle regioni ed eliminare le aree omogenee, quindi il risultato finale è un effetto gradiente di tipo derivativo.
Vediamo un esempio:



(a) immagine originale
(b) Gradiente morfologico di (a)

Ricostruzione morfologica in scala di grigio:
anche in questo contesto abbiamo le due immagini (marker *f*; maschera *g*) di dimensioni uguali e con $f \leq g$ ed un elemento strutturante.

1) *dilatazione geodetica* di taglia 1 di *f* rispetto a *g*:

$$D_g^{(1)}(f) = (f \oplus b) \wedge g$$

quindi effettuiamo la dilatazione di *f* attraverso *b* e poi selezioniamo il minimo tra il risultato e *g* in ogni punto (*x, y*).

2) *erosione geodetica* di taglia 1 di *f* rispetto a *g*:

$$E_g^{(1)}(f) = (f \ominus b) \vee g$$

quindi effettuiamo l'erosione di *f* attraverso *b* e poi selezioniamo il massimo tra il risultato e *g* in ogni punto (*x, y*).

L'*apertura tramite ricostruzione* di immagini in scala di grigio prima erode l'immagine in ingresso e quindi la usa come marker. L'obiettivo è quello di preservare la forma delle componenti dell'immagine dopo il processo di erosione.

La *chiusura tramite ricostruzione* è possibile ottenerla attraverso il complemento dell'immagine, ottenendo l'apertura tramite ricostruzione e complementando il risultato.