Nome e cognome:
Matricola:

8/8	8/8	8/8	8/8	32/30

Matematica del discreto

M1 - Insiemi numerici

23 novembre 2013 - Laurea on line

1. Sia $*$ l'operazione su $\mathbb{R}$ definita da $x * y = xy - 2x - 2y + 6$. Dire, giustificando la risposta, se l'operazione $*$ è associativa, commutativa e ha elemento neutro.

   Siano $x, y, z \in \mathbb{R}$, si ha

   $$x*(y*z) = x*(yz-2y-2z+6) = x(yz-2y-2z+6)-2x-2(yz-2y-2z+6)+6 = xyz-2xy-2xz-2yz+4x+4y+4z-6$$

   $$(x*y)*z = (xy-2x-2y+6)*z = (xy-2x-2y+6)z-2(xy-2x-2y+6)-2z+6 = xyz-2xy-2xz-2yz+4x+4y+4z-6$$

   quindi per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ si ha $x * (y * z) = (x * y) * z$, dunque l'operazione $*$ è associativa.

   Sia $x \in \mathbb{R}$, cerco $u \in \mathbb{R}$ tale che

   $$\begin{cases} x * u = x \\ u * x = x \end{cases}$$

   ovvero

   $$\begin{cases} xu - 2x - 2u + 6 = x \\ ux - 2u - 2x + 6 = x \end{cases} \Leftrightarrow (x-2)u = 3x - 6 \Leftrightarrow (x-2)u = 3(x-2)$$

   ne segue che 3 è l'elemento neutro per $*$.

   L'operazione $*$ è anche commutativa, infatti $x * y = xy - 2x - 2y + 6 = yx - 2y - 2x + 6 = y * x$, tuttavia $(\mathbb{R}, *)$ non è un gruppo abeliano, infatti 2 non è invertibile: per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $2 * x = 2 \neq 3$. L'elemento 2 è però l'unico non invertibile, infatti

   $$x * y = 3 \Leftrightarrow y = \frac{2x-3}{x-2},$$

   inoltre

   $$x * y = 2 \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 6 = 2 \leftrightarrow (x-2)(y-2) = 0 \leftrightarrow x = 2 \text{ oppure } y = 2.$$

   Riassumendo: $(\mathbb{R}, *)$ è un monoide commutativo, mentre $(\mathbb{R} \setminus \{2\}, *)$ è un gruppo abeliano.

2. Sfruttando la scrittura polinomiale dei numeri, dire se 214354321 è divisibile per 13, e in caso negativo calcolarne il resto.

   Osservo che

   $$\begin{array}{lll} [10^0]_{13} = [1]_{13}, & [10^1]_{13} = [-3]_{13}, & [10^2]_{13} = [-30]_{13} = [-4]_{13} \\ [10^3]_{13} = [-40]_{13} = [-1]_{13}, & [10^4]_{13} = [-10]_{13} = [3]_{13}, & [10^5]_{13} = [30]_{13} = [4] \\ [10^6]_{13} = [40]_{13} = [1]_{13} = [10^0]_{13}, & [10^7]_{13} = [10^1]_{13} = [-3]_{13}, & [10^8]_{13} = [10^2]_{13} = [-4]_{13} \end{array}$$

   Il resto richiesto è

   $$\begin{aligned} [214354321]_{13} = {} & [1]_{13} \cdot [1]_{13} + [2]_{13} \cdot [-3]_{13} + [3]_{13} \cdot [-4]_{13} + [4]_{13} \cdot [-1]_{13} + [5]_{13} \cdot [3]_{13} + \\ & [3]_{13} \cdot [4]_{13} + [4]_{13} \cdot [1]_{13} + [1]_{13} \cdot [-3]_{13} + [2]_{13} \cdot [-4]_{13} \\ = {} & [1]_{13} - [6]_{13} - [12]_{13} - [4]_{13} + [15]_{13} + [12]_{13} + [4]_{13} - [3]_{13} - [8]_{13} \\ = {} & [-1]_{13} = [12]_{13}. \end{aligned}$$

3. Risolvere, se possibile, le congruenze

   (a) $12x \equiv 8 \mod 9$,

   (b) $10x \equiv 8 \mod 9$,

   spiegando i passaggi utilizzati per risolverle.

   La prima è equivalente a

$$3x \equiv 2 \mod 9$$

   e poiché $[3x]_9 \in \{[0]_9, [3]_9, [6]_9\}$ *(ovvero* $3x$ *è sempre divisibile per* 3*), risulta impossibile.*

   La seconda è equivalente a

$$x \equiv 8 \mod 9.$$

4. Sia $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dare un esempio di una relazione $\rho \subseteq A^2$ che sia

   (a) riflessiva e simmetrica, ma non transitiva;

   (b) riflessiva e transitiva, ma non simmetrica;

   (c) simmetrica e transitiva, ma non riflessiva.

(a) $\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above] \arrow[r, bend right] & 2 \arrow[loop above] \arrow[l, bend right] \arrow[r, bend right] & 3 \arrow[loop above] \arrow[l, bend right] \arrow[r, bend right] & 4 \arrow[loop above] \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$

(b) $\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above] \arrow[r, bend right] & 2 \arrow[loop above] & 3 \arrow[loop above] \arrow[r, bend right] & 4 \arrow[loop above] \end{tikzcd}$

(c) $1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$