Nome e cognome:
Matricola:

8/8	8/8	8/8	8/8	32/30

Matematica del discreto

M1 - Insiemi numerici

23 novembre 2013 - Laurea on line

1. Sia $*$ l'operazione su $\mathbb{R}$ definita da $x * y = y$. Dire, giustificando la risposta, se l'operazione $*$ è associativa, commutativa e ha elemento neutro.

   Siano $x, y, z \in \mathbb{R}$, si ha
   $$x * (y * z) = x * z = z$$
   $$(x * y) * z = y * z = z$$
   quindi per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ si ha $x * (y * z) = (x * y) * z$, dunque l'operazione $*$ è associativa.

   L'operazione $*$ non è commutativa, infatti $x * y = y$ mentre $y * x = x$, e a meno che $x = y$, i due risultati sono sempre diversi.

   Sia $x \in \mathbb{R}$, cerco $u \in \mathbb{R}$ tale che
   $$\begin{cases} x * u = x \\ u * x = x \end{cases}$$
   ovvero
   $$\begin{cases} u = x \\ x = x \end{cases}$$
   dunque non esiste u tale che per ogni x *sia tale che $x * u = x$, tuttavia si può osservare che* ogni $x \in \mathbb{R}$ *è unità sinistra.*

   Riassumendo: $(\mathbb{R}, *)$ *è semigruppo non commutativo senza identità.*

2. Sfruttando la scrittura polinomiale dei numeri, dire se 123454321 è divisibile per 13, e in caso negativo calcolarne il resto.

   Osservo che
   $$\begin{array}{lll} [10^0]_{13} = [1]_{13}, & [10^1]_{13} = [-3]_{13}, & [10^2]_{13} = [-30]_{13} = [-4]_{13} \\ [10^3]_{13} = [-40]_{13} = [-1]_{13}, & [10^4]_{13} = [-10]_{13} = [3]_{13}, & [10^5]_{13} = [30]_{13} = [4] \\ [10^6]_{13} = [40]_{13} = [1]_{13} = [10^0]_{13}, & [10^7]_{13} = [10^1]_{13} = [-3]_{13}, & [10^8]_{13} = [10^2]_{13} = [-4]_{13} \end{array}$$

   Il resto richiesto è
   $$\begin{aligned} [123454321]_{13} &= [1]_{13} \cdot [1]_{13} + [2]_{13} \cdot [-3]_{13} + [3]_{13} \cdot [-4]_{13} + [4]_{13} \cdot [-1]_{13} + [5]_{13} \cdot [3]_{13} + \\ &\quad [4]_{13} \cdot [4]_{13} + [3]_{13} \cdot [1]_{13} + [2]_{13} \cdot [-3]_{13} + [1]_{13} \cdot [-4]_{13} \\ &= [1]_{13} - [6]_{13} - [12]_{13} - [4]_{13} + [15]_{13} + [16]_{13} + [3]_{13} - [6]_{13} - [4]_{13} \\ &= [3]_{13}. \end{aligned}$$

3. Risolvere l'equazione diofantea $34x + 8y = 12$ spiegando i passaggi utilizzati per risolverla.

Iniziamo calcolando il massimo comun divisore tra 34 *e* 8*:*

$$\begin{aligned} 34 =& 4 \cdot 8 + \mathbf{2} \\ 8 =& 4 \cdot 2 \end{aligned}$$

dunque è 2*. Poiché* 2 *divide* 12 *l'equazione è possibile, una soluzione particolare è data applicando l'identità di Bézout e moltiplicando per* $12/MCD(34, 8)$*:*

$$\begin{aligned} 1 \cdot 34 - 4 \cdot 8 = 2 \\ 12 = 6 \cdot 34 - 24 \cdot 8 \end{aligned}$$

quindi $(6, -24)$ *è soluzione particolare. La soluzione generale è data da* $(6 + 4n, -24 - 17n)$*,* $n \in \mathbb{Z}$*.*

4. Sia $\rho \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ la relazione definita da

$$(x, y)\rho(u, v) \text{ se e solo se } \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} \leq 1.$$

Dire se ρ è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Siano $P = (x, y)$ *e* $Q = (u, v)$ *due punti del piano* $\mathbb{R}^2$*, allora* P *è in relazione con* Q *rispetto a* ρ *se e solo se la distanza tra* P *e* Q *è minore o uguale a* 1*. Tale relazione è evidentemente riflessiva e simmetrica (infatti ogni punto dista da se stesso* 0 *e la distanza tra* P *e* Q *è uguale a quella tra* Q *e* P*), ma non può essere transitiva, ad esempio si considerino i punti* $P_0 = (0, 0)$*,* $P_1 = (1, 0)$ *e* $P_2 = (2, 0)$*, allora* $P_0 \rho P_1$ *e* $P_1 \rho P_2$*, ma* $P_0 \not\rho P_2$*.*