Nome e cognome:
Matricola:

8/8	8/8	8/8	8/8	32/30

Matematica del discreto

M1 - Insiemi numerici

23 novembre 2013 - Laurea on line

1. Sia $*$ l'operazione su $\mathbb{R}$ definita da $x * y = xy + 1$. Dire, giustificando la risposta, se l'operazione $*$ è associativa, commutativa e ha elemento neutro.

Siano $x, y, z \in \mathbb{R}$, si ha

$$x * (y * z) = x * (yz + 1) = xyz + x + 1$$
$$(x * y) * z = (xy + 1) * z = xyz + z + 1$$

quindi in generale l'operazione $*$ non è associativa.

L'operazione $*$ è commutativa, infatti $x * y = xy + 1 = yx + 1 = y * x$.

Sia $x \in \mathbb{R}$, cerco $u \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} x * u = x \\ u * x = x \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} xu + 1 = x \\ ux + 1 = x \end{cases}$$

dunque $u(x-1) = -1$, ne segue che non esiste unità, infatti la definizione di u non deve dipendere dalla scelta di x.

Riassumendo: $(\mathbb{R}, *)$ è una struttura algebrica commutativa non associativa e senza identità.

2. Sfruttando la scrittura polinomiale dei numeri, dire se 132454221 è divisibile per 13, e in caso negativo calcolarne il resto.

Osservo che

$$\begin{array}{lll} [10^0]_{13} = [1]_{13}, & [10^1]_{13} = [-3]_{13}, & [10^2]_{13} = [-30]_{13} = [-4]_{13} \\ [10^3]_{13} = [-40]_{13} = [-1]_{13}, & [10^4]_{13} = [-10]_{13} = [3]_{13}, & [10^5]_{13} = [30]_{13} = [4] \\ [10^6]_{13} = [40]_{13} = [1]_{13} = [10^0]_{13}, & [10^7]_{13} = [10^1]_{13} = [-3]_{13}, & [10^8]_{13} = [10^2]_{13} = [-4]_{13} \end{array}$$

Il resto richiesto è

$$\begin{aligned} [132454221]_{13} &= [1]_{13} \cdot [1]_{13} + [2]_{13} \cdot [-3]_{13} + [2]_{13} \cdot [-4]_{13} + [4]_{13} \cdot [-1]_{13} + [5]_{13} \cdot [3]_{13} + \\ &\quad [4]_{13} \cdot [4]_{13} + [2]_{13} \cdot [1]_{13} + [3]_{13} \cdot [-3]_{13} + [1]_{13} \cdot [-4]_{13} \\ &= [1]_{13} - [6]_{13} - [8]_{13} - [4]_{13} + [15]_{13} + [16]_{13} + [2]_{13} - [9]_{13} - [4]_{13} \\ &= [3]_{13}. \end{aligned}$$

3. Determinare tutte le soluzioni del sistema di congruenze

$$\begin{cases} 8x \equiv 1 & \pmod 9 \\ 9x \equiv 1 & \pmod{10} \\ 10x \equiv 1 & \pmod{11} \end{cases}$$

indicando quali proprietà delle congruenze si sono utilizzate per risolverlo.

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x \equiv -1 & \pmod 9 \\ x \equiv -1 & \pmod{10} \\ x \equiv -1 & \pmod{11} \end{cases}$$

infatti basta moltiplicare rispettivamente per $[-1]_9$, $[-1]_{10}$ *e* $[-1]_{11}$ *le tre equazioni. Evidentemente* -1 *è soluzione di ogni equazione, e poiché per il teorema cinese del resto la soluzione è unica modulo* $9 \cdot 10 \cdot 11 = 990$*, la soluzione del sistema è* $[-1]_{990}$.

4. Sia $\rho \subseteq \mathbb{Z}^2$ la relazione definita da

$$(x, y) \in \rho \text{ se e solo se } x^2 + y^2 \text{ è pari.}$$

Dire se ρ è di equivalenza e in caso affermativo descriverne le classi di equivalenza.

La relazione è riflessiva, infatti per ogni $x \in \mathbb{Z}$ *si ha che* $x^2 + x^2$ *è pari, dunque* $x \rho x$.

È anche simmetrica, infatti se $x^2 + y^2$ *è pari, lo è anche* $y^2 + x^2$.

Infine è anche transitiva, infatti se $x^2 + y^2$ *e* $y^2 + z^2$ *sono pari, anche* $x^2 + 2y^2 + z^2$ *è pari, così come* $x^2 + z^2$*, quindi se* $x \rho y$ *e* $y \rho z$*, anche* $x \rho z$.

La relazione ρ *è di equivalenza, si ha*

$$\begin{aligned} [0]_\rho &= \{x \in \mathbb{Z} \mid 0^2 + x^2 \text{ è pari}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \text{ è pari}\} = \mathbb{P}, \\ [1]_\rho &= \{x \in \mathbb{Z} \mid 1^2 + x^2 \text{ è pari}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \text{ è dispari}\} = \mathbb{D}. \end{aligned}$$

Si hanno allora due classi di equivalenza e $\mathbb{Z}/\rho = \{\mathbb{P}, \mathbb{D}\}$.