Fondamenti di Matematica del discreto

M1 - Insiemi numerici

25 gennaio 2013 - Laurea on line

Esercizio 1.
Dire, motivando la risposta, se è possibile scrivere 3 come combinazione lineare di 507 e 2010, e in caso affermativo determinare due interi a e b tali che

$$507 \cdot a + 2010 \cdot b = 3.$$

Svolgimento. Affinché l'equazione abbia soluzione, il massimo comun divisore tra 507 e 2010 deve dividere 3, si ha:

$$\begin{aligned} 2010 &= 3 \cdot 507 + 489 \\ 507 &= 1 \cdot 489 + 18 \\ 489 &= 27 \cdot 18 + 3 \\ 18 &= 6 \cdot 3 \end{aligned}$$

Leggendo le uguaglianze dal basso verso l'alto si ottiene:

$$\begin{aligned} 3 &= 489 - 27 \cdot 18 \\ &= 489 - 27 \cdot (507 - 489) = 28 \cdot 489 - 27 \cdot 507 \\ &= 28 \cdot (2010 - 3 \cdot 507) - 27 \cdot 507 = 28 \cdot 2010 - 111 \cdot 507 \end{aligned}$$

Dunque una possibile soluzione è $a = 28$ e $b = -111$. □

Esercizio 2.
Calcolare $[12564^{30}]_{11}$.

Svolgimento. Iniziamo osservando che 12564 e 11 sono primi tra loro, infatti 11 è un numero primo e 12564 non è divisibile per 11 (lo si può vedere applicando il criterio della divisibilità per 11, o direttamente eseguendo la divisione). Il piccolo teorema di Fermat afferma che se p è primo e a e p sono primi tra loro, allora $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Ne segue immediatamente che $12564^{30} \equiv 1 \pmod{11}$. □

Esercizio 3.
Determinare tutte le soluzioni del sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 3 & \pmod{17} \\ x \equiv 4 & \pmod{11} \\ x \equiv 5 & \pmod{6} \end{cases}$$

indicando quali proprietà delle congruenze si sono utilizzate per risolverlo.

Svolgimento. 17, 11 e 6 sono primi tra loro, allora per il teorema cinese del resto possiamo risolvere separatamente le tre equazioni congruenziali

$$11 \cdot 6 \cdot x \equiv 3 \pmod{17} \qquad 17 \cdot 6 \cdot x \equiv 4 \pmod{11} \qquad 17 \cdot 11 \cdot x \equiv 5 \pmod{6}$$

indicata con x_1, x_2 e x_3 una soluzione rispettivamente della prima, seconda e terza equazione congruenziale, la soluzione del sistema è $x = 11 \cdot 6 \cdot x_1 + 17 \cdot 6 \cdot x_2 + 17 \cdot 11 \cdot x_3 \pmod{17 \cdot 11 \cdot 6}$. Si ha allora

$$\begin{array}{ccc}
11 \cdot 6 \cdot x \equiv 3 \pmod{17} & 17 \cdot 6 \cdot x \equiv 4 \pmod{11} & 17 \cdot 11 \cdot x \equiv 5 \pmod{6} \\
\Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\
66x \equiv 3 \pmod{17} & 102x \equiv 4 \pmod{11} & 187x \equiv 5 \pmod{6} \\
\Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\
-2x \equiv 3 \pmod{17} & 3x \equiv 4 \pmod{11} & x \equiv 5 \pmod{6} \\
\Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\
x \equiv -3 \cdot 9 \pmod{17} & x \equiv 4 \cdot 4 \pmod{11} & x \equiv 5 \pmod{6} \\
\Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\
x \equiv 7 \pmod{17} & x \equiv 5 \pmod{11} & x \equiv 5 \pmod{6}
\end{array}$$

da cui

$$x \equiv 11 \cdot 6 \cdot 7 + 17 \cdot 6 \cdot 5 + 17 \cdot 11 \cdot 5 \equiv 462 + 510 + 935 \equiv 1907 \equiv 785 \pmod{1122}$$

□

Fondamenti di Matematica del discreto

M2 - Gruppi, anelli e campi

25 gennaio 2013 - Laurea on line

Esercizio 1.
Si definisca su $\mathbb{Z}$ l'operazione $*$ in tal modo:

$$n * m = \begin{cases} n+m, & 2 \text{ divide } n; \\ n-m, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Provare che $(\mathbb{Z}, *)$ è un gruppo. È abeliano?

Svolgimento. Iniziamo osservando che l'operazione $*$ è interna a $\mathbb{Z}$, essendo definita a partire da operazioni interne a $\mathbb{Z}$. Bisogna ora provare che è associativa, ovvero che per ogni $n, m, l \in \mathbb{Z}$ si ha $(n * m) * l = n * (m * l)$. Per fare ciò dobbiamo distinguere quattro casi:

•$2 \mid n,\ 2 \mid m$

$$\begin{array}{rc} (n*m)*l = (n+m)*l = & n+m+l \\ & \| \\ n*(m*l) = n+(m*l) = & n+m+l \end{array}$$

•$2 \nmid n,\ 2 \mid m$

$$\begin{array}{rc} (n*m)*l = (n-m)*l = & n-m-l \\ & \| \\ n*(m*l) = n-(m+l) = & n-m-l \end{array}$$

•$2 \mid n,\ 2 \nmid m$

$$\begin{array}{rc} (n*m)*l = (n+m)*l = & n+m-l \\ & \| \\ n*(m*l) = n+(m-l) = & n+m-l \end{array}$$

•$2 \nmid n,\ 2 \nmid m$

$$\begin{array}{rc} (n*m)*l = (n-m)*l = & n-m+l \\ & \| \\ n*(m*l) = n-(m-l) = & n-m+l \end{array}$$

Dunque $(\mathbb{Z}, *)$ è un semigruppo. Stabiliamo ora se esiste un elemento neutro: se u fosse l'elemento neutro, allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si avrebbe $n * u = u * n = n$. Come prima distinguiamo due casi:

•$2 \mid n \;\; n * u = n + u = n \Rightarrow u = 0$,

•$2 \nmid n \;\; n * u = n - u = n \Rightarrow u = 0$,

inoltre si ha anche $0 * n = 0 + n = n$, per cui 0 è elemento neutro di $(\mathbb{Z}, *)$. Dato $n \in \mathbb{Z}$ stabiliamo se è invertibile, ovvero se esiste $m \in \mathbb{Z}$ tale che $n * m = m * n = 0$:

$\bullet 2 \mid n \quad n * m = 0 \Rightarrow n + m = 0 \Rightarrow m = -n,$

$\bullet 2 \nmid n \quad n * m = 0 \Rightarrow n - m = 0 \Rightarrow m = n,$

si osservi poi che le identità rimangono vere anche se m è moltiplicato a sinistra di n. Ne segue che ogni elemento $n \in \mathbb{Z}$ è invertibile e il suo inverso è $-n$ se n è pari e n se n è dispari; in particolare $(\mathbb{Z}, *)$ è un gruppo. Non può essere abeliano, infatti $1 * 2 = -1 \neq 2 * 1 = 3$. □

Esercizio 2.
Determinare, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ a & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Svolgimento. Il sistema ha soluzioni se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è uguale a quello della matrice completa. La matrice completa ha rango 3, infatti se si considera la sottomatrice determinata dall seconda e terza colonna dei coefficienti e dalla colonna dei termini noti si ha:

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 9 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 9 + a^2 \neq 0.$$

La matrice dei coefficienti ha rango almeno 2 (infatti basta considerare la sottomatrice ottenuta intersecando prima e seconda riga con seconda e terza colonna: $\left|\begin{smallmatrix} a & 2 \\ 9 & 0 \end{smallmatrix}\right| = -18 \neq 0$). Affinché abbia rango 3 il suo determinante deve essere diverso da 0, si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ a & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9 - a^2$$

che si annulla per $a = 3$ e $a = -3$. Riassumendo: per ogni $a \in \mathbb{R} \setminus \{3, -3\}$, le due matrici hanno rango massimo 3, e dunque il sistema ammette un'unica soluzione, nei restanti casi il sistema è impossibile. □

Esercizio 3.
Si consideri il gruppo di permutazioni S_7:

1. scrivere la permutazione $\pi = (1372)(21435)(4123657)$ come prodotto di cicli disgiunti;
2. stabilire se π è pari e, senza svolgere i conti, se π^5 è pari o dispari;
3. determinare il periodo di π e di π^3;
4. determinare un elemento di S_7 che abbia il massimo ordine possibile.

Svolgimento. Per prima cosa si fattorizza π come prodotto di cicli disgiunti svolgendo i calcoli:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 6 & 1 & 7 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & & 4 & & 2 & 3 \\ 3 & & & & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene $\pi = (136)(25)$. Allora π si può scrivere come prodotto di 3 scambi e dunque è dispari, così come π^5. L'ordine di π è il minimo comune multiplo tra 3 e 2, cioè 6, mentre π^3 ha ordine 2 (infatti $(\pi^3)^2 = \pi^6 = id$). Per determinare un elemento di S_7 che abbia ordine massimo bisogna cercare dei naturali la cui somma sia 7 e il cui minimo comune multiplo sia il più grande possibile: è facile vedere che la coppia 3, 4 realizza tale condizione. Allora una permutazione che si fattorizza come prodotto di due cicli disgiunti di lunghezza 3 e 4 rispettivamente (ad esempio $\sigma = (123)(4567)$) avrà ordine 12. $\square$

Fondamenti di Matematica del discreto

M3 - Spazi vettoriali e omomorfismi

25 gennaio 2013 - Laurea on line

Esercizio 1.
Dire, giustificando la risposta, quale tra le seguenti funzioni non è un'applicazione lineare:

1. $f_1(x) = (x, 2x)$,
2. $f_2(x, y, z) = (x + 2y - z, x - 2z)$,
3. $f_3(x, y, z, t) = x - 2y + 3z - t$,
4. $f_4(x, y) = (x + 1, x + y)$.

Svolgimento. Le prime tre funzioni sono applicazioni lineari, infatti possono anche essere scritte come opportuni prodotti righe per colonna tra matrici:

1. $$f_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (x),$$
2. $$f_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$
3. $$f_3(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

La quarta non conserva il vettor nullo, ovvero $f_4(0, 0) = (1, 0) \neq (0, 0)$, e dunque non può essere lineare. $\square$

Esercizio 2.
Sia $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare

$$f_\alpha(x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'applicazione f_α è invertibile?

Svolgimento. L'applicazione f_α è invertibile se e solo se la matrice che la rappresenta è invertibile, ovvero ha determinante diverso da 0. Il determinante della matrice (calcolato ad esempio col metodo di Sarrus) è 9α, dunque affinché non sia nullo è sufficiente che sia $\alpha \neq 0$. $\square$

Esercizio 3.
Calcolare autovalori e autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e dire se è diagonalizzabile.

Svolgimento. Gli autovalori annullano il polinomio caratteristico, che è dato da:

$$|A - \lambda I| = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 4 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2 - 4(1-\lambda)$$
$$= (1-\lambda)(4 - 4\lambda + \lambda^2 - 4) = \lambda(1-\lambda)(\lambda - 4).$$

Gli autovalori sono 0, 1 e 4, ed essendo tutti con molteplicità algebrica 1, sono regolari, e dunque la matrice A è diagonalizzabile. Per determinare gli autovettori corrispondenti a un dato autovalore è necessario risolvere il sistema lineare oogeneo associato $(A - \lambda I)v = \underline{0}$:

•$\lambda = 0$

$$\begin{cases} x + 3y - 2z &= 0 \\ 2y + 4z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \end{cases}$$

La seconda e terza riga sono uguali, togliendo alla prima riga tre volte la terza si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} x &= 8z \\ y &= -2z \end{cases}$$

Da cui si ottiene immediatamente l'autospazio $A_0 = \{(8t, -2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Si noti che poiché l'autovalore ha molteplicità algebrica 1, esso ha anche molteplicità geometrica 1, e infatti l'autospazio A_0 è una retta di $\mathbb{R}^3$.

•$\lambda = 1$

$$\begin{cases} 3y - 2z &= 0 \\ y + 4z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{cases}$$

Affinché le tre equazioni siano verificate deve essere evidentemente $y = z = 0$, si ottiene dunque l'autospazio $A_1 = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, ancora una retta di $\mathbb{R}^3$ (in particolare è l'asse delle x).

•$\lambda = 4$

$$\begin{cases} -3x + 3y - 2z &= 0 \\ -2y + 4z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \end{cases}$$

Come nel primo caso, la seconda e terza riga sono uguali, togliendo alla prima riga tre volte la terza si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} 3x &= 4z \\ y &= 2z \end{cases}$$

Si ottiene immediatamente l'autospazio $A_4 = \{(4t, 6t, 3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, che è una retta di $\mathbb{R}^3$.

$\square$