Fondamenti di Matematica del discreto

M1 - Insiemi numerici

12 gennaio 2013 - Laurea on line

Esercizio 1.
Dire, motivando la risposta, quali delle seguenti equazione diofantee ammettono soluzioni e risolvere quelle possibili

$$324x + 81y = 26,$$
$$324x + 81y = 27,$$
$$36x + 90y = 53.$$

Svolgimento. Un'equazione diofantea del tipo $ax + by = c$ ammette soluzioni se e solo se il massimo comun divisore tra a e b divide c. Nei primi due casi il massimo comune divisore tra 324 e 81 è 81, che non divide ne 26 ne 27. Nel terzo caso il massimo comun divisore tra 36 e 90 è 18 che non divide 53. Dunque nessuna delle tre equazioni ammette soluzioni. □

Esercizio 2.
Usando la scrittura polinomiale dei numeri, dopo aver stabilito a quanto sono congrue modulo 29 le varie potenze di 10, calcolare il resto della divisione di 753245 per 29.

Svolgimento. Si ha $753245 = 5 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^5$, inoltre

$$\begin{aligned}
10^0 &\equiv_{29} 1 \\
10^1 &\equiv_{29} 10 \\
10^2 &\equiv_{29} 13 \\
10^3 &\equiv_{29} 10 \cdot 13 \equiv_{29} 14 \\
10^4 &\equiv_{29} 10 \cdot 14 \equiv_{29} -5 \\
10^5 &\equiv_{29} 10 \cdot (-5) \equiv_{29} 8
\end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned}
753245 &\equiv_{29} 5 \cdot 1 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 13 + 3 \cdot 14 + 5 \cdot (-5) + 7 \cdot 8 \\
&\equiv_{29} 5 + 40 + 26 + 42 - 25 + 56 \equiv_{29} 5 + 11 - 3 + 13 + 4 - 2 \equiv_{29} 28
\end{aligned}$$

e dunque il resto della divisione di 753245 per 29 è 28. □

Esercizio 3.
Determinare tutte le soluzioni del sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 8 & \pmod 5 \\ x \equiv 9 & \pmod 6 \\ x \equiv 10 & \pmod 7 \end{cases}$$

indicando quali proprietà delle congruenze si sono utilizzate per risolverlo.

Svolgimento. Il sistema dato è equivalente a

$$\begin{cases} x \equiv 3 & \pmod 5 \\ x \equiv 3 & \pmod 6 \\ x \equiv 3 & \pmod 7 \end{cases}$$

e poiché 5, 6 e 7 son primi tra loro esso ammette un'unica soluzione modulo $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$. Poiché 3 è sicuramente soluzione di tutte e tre le equazioni, lo è anche del sistema, e dunque la soluzione è $[210]_{29}$. $\square$

Fondamenti di Matematica del discreto

M2 - Gruppi, anelli e campi

12 gennaio 2013 - Laurea on line

Esercizio 1.
Determinare tutti i possibili omomorfismi tra $(\mathbb{Z}_5, +)$ e $(\mathbb{Z}_{15}, +)$.

Svolgimento. $(\mathbb{Z}_5, +)$ è un gruppo ciclico di ordine 5 e $[1]_5$ è un suo generatore. Dunque se φ è un omomorfismo da $(\mathbb{Z}_5, +)$ a $(\mathbb{Z}_{15}, +)$, esso è univocamente determinato da $\varphi([1]_5)$, infatti se $n \in \mathbb{N}$ si ha $\varphi([n]_5) = n \cdot \varphi([1]_5)$. La classe $[1]_5$ ha ordine 5 in $(\mathbb{Z}_5, +)$, e quindi l'ordine di $\varphi([1]_5)$ deve dividere 5. L'ordine di un elemento di $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ è un divisore di 15, dunque può essere 1, 3, 5 o 15, e tra questi solo 1 e 5 dividono 5. Riassumendo, $o(\varphi([1]_5)) \in \{1, 5\}$, ovvero $\varphi([1]_5) \in \{[0]_{15}, [3]_{15}, [6]_{15}, [9]_{15}, [12]_{15}\}$.
Se $\varphi([1]_5) = [0]_{15}$ si ottiene l'omomorfismo nullo (o banale).
Se $\varphi([1]_5) = [3]_{15}$ si ottiene l'omomorfismo

$$\begin{array}{rcl} (\mathbb{Z}_5, +) & \longrightarrow & (\mathbb{Z}_{15}, +) \\ [n]_5 & \longrightarrow & [3 \cdot n]_{15} \end{array}$$

Se $\varphi([1]_5) = [6]_{15}$ si ottiene l'omomorfismo

$$\begin{array}{rcl} (\mathbb{Z}_5, +) & \longrightarrow & (\mathbb{Z}_{15}, +) \\ [n]_5 & \longrightarrow & [6 \cdot n]_{15} \end{array}$$

Se $\varphi([1]_5) = [9]_{15}$ si ottiene l'omomorfismo

$$\begin{array}{rcl} (\mathbb{Z}_5, +) & \longrightarrow & (\mathbb{Z}_{15}, +) \\ [n]_5 & \longrightarrow & [9 \cdot n]_{15} \end{array}$$

Se $\varphi([1]_5) = [12]_{15}$ si ottiene l'omomorfismo

$$\begin{array}{rcl} (\mathbb{Z}_5, +) & \longrightarrow & (\mathbb{Z}_{15}, +) \\ [n]_5 & \longrightarrow & [12 \cdot n]_{15} \end{array}$$

$\square$

Esercizio 2.
Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} k+4 & 3 \\ 4 & k \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Svolgimento. È sufficiente confrontare il rango della matrice dei coefficienti con quello della matrice completa del sistema. Si ha

$$\begin{vmatrix} 4k+4 & 4 & 3k \\ 4 & k & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+4 & 4 & 3k \\ 0 & k & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+4 & 4 & 3k \\ 0 & k-2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(k+4)(k-2).$$

Dunque per $k \notin \{2, -4\}$ il determinante è diverso da 0 e dunque ha rango 3, poiché la matrice dei coefficienti può avere al più rango 2, in questi casi il sistema risulta impossibile. Per $k = -4$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 3y & = -12 \\ 4x - 4y & = 4 \\ 2x + y & = 2 \end{cases}$$

anch'esso impossibile (infatti la matrice dei coefficienti ha rango 1, mentre quella completa ha rango 2). Per $k = 2$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 6x + 3y & = 6 \\ 4x + 2y & = 4 \\ 2x + y & = 2 \end{cases}$$

che è equivalente all'unica equazione $2x + y = 2$ che ammette infinite soluzioni. $\square$

Esercizio 3.
Si consideri il gruppo di permutazioni S_9:

1. scrivere la permutazione $\pi = (132)(2435)(4657)$ come prodotto di cicli disgiunti;
2. stabilire se π è pari e, senza svolgere i conti, se π^3 è pari o dispari;
3. determinare il periodo di π e di π^2;
4. determinare l'inverso di π.

Svolgimento. Per prima cosa si fattorizza π come prodotto di cicli disgiunti svolgendo i calcoli:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ & & & 6 & 7 & 5 & 4 & & \\ & 4 & 5 & & & 2 & 3 & & \\ 3 & & & & & 1 & 2 & & \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene $\pi = (1357246)$. Allora π si può scrivere come prodotto di 6 scambi disgiunti ed è pari, così come π^3. L'ordine di π è 7, così come quello di π^2; l'inverso di π è $\pi^{-1} = \pi^6 = (6427531)$. $\square$

Fondamenti di Matematica del discreto

M3 - Spazi vettoriali e omomorfismi

12 gennaio 2013 - Laurea on line

Esercizio 1.
Dati i vettori $u = (k, 1, 0)$, $v = (4, k, 1)$, $w = (-2, 1, 1)$, determinare quanti sono linearmente indipendenti al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Il numero di vettori linearmente indipendenti è il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} k & 4 & -2 \\ 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è

$$\begin{vmatrix} k & 4 & -2 \\ 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 4 & -2 \\ 1 & k-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 6 & -2 \\ 1 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 6 & 0 \\ 1 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= k(k-1) - 6 = k^2 - k - 6 = (k-3)(k+2).$$

Per $k \notin \{3, -2\}$ la matrice ha rango 3 e i 3 vettori risultano linearmente indipendenti. Per $k = 3$ la matrice ha rango 2 e $w = v - 2u$. Per $k = -2$ la matrice ha rango 2 e $w = v + 3u$. □

Esercizio 2.
Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ lineare, tale che

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad f(e_3) = f(e_1) - 3f(e_2), \quad f(e_4) = f(e_1) - f(e_3),$$

dove e_1, e_2, e_3 e e_4 indicano i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$. Scrivere la matrice associata a f e le dimensioni dell'immagine e del nucleo di f.

Svolgimento. La matrice associata a f è

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 & 9 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

La terza e la quarta colonna sono combinazione lineare delle prime due, infatti $f(e_3) = f(e_1) - 3f(e_2)$ e $f(e_4) = f(e_1) - f(e_3) = f(e_1) - f(e_1) + 3f(e_2) = 3f(e_2)$, mentre le prime due sono evidentemente linearmente indipendenti tra loro, non essendo una un multiplo dell'altra. Dunque la dimensione dell'immagine di f è 2 e dal teorema di nullità+rango si ha che anche il nucleo ha dimensione 2. □

Esercizio 3.
Calcolare autovalori e autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e dire se è diagonalizzabile.

Svolgimento. Iniziamo calcolando il polinomio caratteristico

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 3 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(3-\lambda) - 6(3-\lambda) = (3-\lambda)(\lambda - \sqrt{6})(\lambda + \sqrt{6}).$$

Si ottengono i 3 autovalori distinti 3, $\sqrt{6}$ e $-\sqrt{6}$ che hanno molteplicità algebrica e geometrica coincidenti; in particolare sono tutti e 3 regolari e la matrice A risulta diagonalizzabile.
Gli autovettori relativi all'autovalore 3 sono le soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 0 & = 0 \\ x - 3y + 3z & = 0 \\ 2y - 3z & = 0 \end{cases}$$

che ha per soluzioni i multipli del vettore $(2, 2, 3)$.
Gli autovettori relativi all'autovalore $\sqrt{6}$ sono le soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} (3 - \sqrt{6})x & = 0 \\ x - \sqrt{6}y + 3z & = 0 \\ 2y - \sqrt{6}z & = 0 \end{cases}$$

che ha per soluzioni i multipli del vettore $(1, 3, \sqrt{6})$.
Gli autovettori relativi all'autovalore $-\sqrt{6}$ sono le soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} (3 + \sqrt{6})x & = 0 \\ x + \sqrt{6}y + 3z & = 0 \\ 2y + \sqrt{6}z & = 0 \end{cases}$$

che ha per soluzioni i multipli del vettore $(1, -3, \sqrt{6})$. $\square$