Nome e cognome:
Matricola:

8/8	8/8	8/8	8/8	32/30

Matematica del discreto

M1 - Insiemi numerici

11 gennaio 2014 - Laurea on line

1. Dimostrare facendo uso del principio d'induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ il numero $n^3 + 5n$ è divisibile per 6.

   Iniziamo osservando che il caso base ($n = 0$) è verificato, infatti $0^3 + 5 \cdot 0$ è divisibile per 6.
   Supponiamo ora che la proprietà sia vera per qualche n maggiore o uguale a 0, mostriamo che è vera anche per $n + 1$. Infatti si ha

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 5(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 = n^3 + 3n^2 + 8n + 6\\ &= (n^3 + 5n) + (3n^2 + 3n + 6) = (n^3 + 5n) + (3n(n+1)) + 6.\end{aligned}$$

   Il primo addendo è divisibile per 6 per ipotesi induttiva. Il secondo addendo è un multiplo di 3 e inoltre è pari, infatti o n è pari o $n + 1$ è pari, quindi è divisibile per 6. Infine il terzo addendo è 6, e poiché la somma di multipli di 6 è ancora un multiplo di 6 la proprietà è verificata.

2. Sfruttando la scrittura polinomiale dei numeri, dire se 132454321 è divisibile per 17, e in caso negativo calcolarne il resto.

   Il numero 132454321 *è uguale a*

$$1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^7 + 1 \cdot 10^8$$

   e

$$\begin{array}{lll} [10^0]_{17} = [1]_{17}, & [10^1]_{17} = [-7]_{17}, & [10^2]_{17} = [-70]_{17} = [-2]_{17} \\ [10^3]_{17} = [-20]_{17} = [-3]_{17}, & [10^4]_{17} = [-30]_{17} = [4]_{17}, & [10^5]_{17} = [40]_{17} = [-6] \\ [10^6]_{17} = [60]_{17} = [-8]_{17}, & [10^7]_{17} = [-80]_{17} = [5]_{17}, & [10^8]_{17} = [50]_{17} = [-1]_{17} \end{array}$$

   Il resto richiesto è

$$\begin{aligned} [214354321]_{17} &= [1]_{17} \cdot [1]_{17} + [2]_{17} \cdot [-7]_{17} + [3]_{17} \cdot [-2]_{17} + [4]_{17} \cdot [-3]_{17} + [5]_{17} \cdot [4]_{17} + \\ &\quad [4]_{17} \cdot [6]_{17} + [2]_{17} \cdot [-8]_{17} + [3]_{17} \cdot [5]_{17} + [1]_{17} \cdot [-1]_{17} \\ &= [1]_{17} - [14]_{17} - [6]_{17} - [12]_{17} + [20]_{17} + [24]_{17} - [16]_{17} + [15]_{17} - [1]_{17} \\ &= [11]_{17}. \end{aligned}$$

3. Determinare tutte le soluzioni del sistema di congruenze

$$\begin{cases} 3x \equiv 1 & \pmod 8 \\ 2x \equiv 1 & \pmod{11} \\ x \equiv 1 & \pmod{15} \end{cases}$$

indicando quali proprietà delle congruenze si sono utilizzate per risolverlo.

Osserviamo che 8, 11 *e* 15 *sono primi tra loro, quindi il sistema ha un'unica soluzione modulo* $8 \cdot 11 \cdot 15 = 1320 = R$. *Poiché* $[3]_8^{-1} = [3]_8$ *e* $[2]_{11}^{-1} = [6]_{11}$, *sistema è equivalente a*

$$\begin{cases} x \equiv 3 & \pmod 8 \\ x \equiv 6 & \pmod{11} \\ x \equiv 1 & \pmod{15} \end{cases}$$

Risolvo quindi separatamente le congruenze

(a) $(11 \cdot 15)x \equiv 3 \pmod 8$, $165x \equiv 3 \pmod 8$, $-3x \equiv 3 \pmod 8$, $x \equiv 7 \pmod 8$;

(b) $(8 \cdot 15)x \equiv 6 \pmod{11}$, $-x \equiv 6 \pmod{11}$, $x \equiv 5 \pmod{11}$;

(c) $(8 \cdot 11)x \equiv 1 \pmod{15}$, $88x \equiv 1 \pmod{15}$, $-2x \equiv 1 \pmod{15}$, $x \equiv 7 \pmod{15}$;

La soluzione è quindi

$$x = [165 \cdot 7 + 120 \cdot 5 + 88 \cdot 7]_{1320} = [1051]_{1320}.$$

4. Sia $\sharp$ la relazione su $\mathbb{R}$ definita da

$$x \sharp y \text{ se e solo se } (x-y)(x+y)=0.$$

Dire se $\sharp$ è di equivalenza e in caso affermativo descriverne le classi di equivalenza.

Iniziamo osservando che due numeri sono in relazione se i loro quadrati sono uguali.
La relazione è riflessiva, infatti per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che $x^2 = x^2$.

È anche simmetrica, infatti se $x^2 = y^2$ è pari, anche $y^2 = x^2$.

Infine è anche transitiva, infatti se $x^2 = y^2$ e $y^2 = z^2$ allora $x^2 = z^2$.

Quindi la relazione $\sharp$ è di equivalenza, e si ha

$$[x]_\sharp = \{y \in \mathbb{R} \mid x^2 = y^2\} = \{x, -x\}.$$