Nome e cognome:
Matricola:

8/8	8/8	8/8	8/8	32/30

Matematica del discreto

M3 - Vettori e geometria

11 gennaio 2014 - Laurea on line

1. Nel piano siano dati il punto $P = (-1, 0)$ e la retta $r: \; x + y + 5 = 0$. Determinare la retta passante per P e parallela a r e la retta per P perpendicolare a r.

   Un'equazione parametrica di r è
   $$r : \begin{cases} x = t \\ y = -t - 5 \end{cases}$$
   quindi la direzione di r è $d_r = (1, -1)$. La retta per P parallela a r ha quindi equazioni parametriche
   $$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = -t \end{cases}$$
   ovvero equazione cartesiana $x + y + 1 = 0$. Sia $d = (a, b)$ la direzione della seconda retta cercata, poiché è perpendicolare a d_r deve essere $(a, b) \cdot (1, -1) = a - b = 0$, cioè $a = b$. La direzione della retta cercata è quindi $(1, 1)$, una sua equazione parametrica è
   $$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t \end{cases}$$
   ovvero equazione cartesiana $x - y + 1 = 0$.

2. I punti $A = (1, 1, 0)$, $B = (-1, -1, 2)$, $C = (1, 1, 3)$ e $D = (2, 2, 0)$ sono complanari? In caso affermativo determinare un piano che li contenga.

Sia π *il piano passante per* A*,* B *e* C*, se* $v = (x, y, z) \in \pi$*, allora* $v = A + t(B - A) + s(C - A)$*, con* $s, t \in \mathbb{R}$*. Un'equazione parametrica di* π *è allora:*

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2t + 3s \end{cases}$$

e dalle prime due si ottiene immediatamente che un'equazione cartesiana è $\pi : x = y$*. Poiché le coordinate di* D *soddisfano questa relazione, anche* $D \in \pi$*, i quattro punti risultano complanari e* π *è il piano richiesto.*

3. Si considerino nello spazio la retta r ed il piano π rispettivamente di equazioni

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = 2t - 2 \end{cases} \qquad\qquad \pi: \ x + y - z + 1 = 0.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) r è parallela a π;

(b) r è contenuta in π;

(c) un vettore perpendicolare a r è $v = (2, 3, 2)$;

(d) r interseca π.

La direzione di r è $d_r = (2, 3, 2)$, quindi il vettore v non può essere perpendicolare a r. La direzione normale a π è $n_\pi = (1, 1, -1)$, poiché $d_r \cdot n_\pi = 3 \neq 0$, d_r e n_π non sono perpendicolari, e quindi la retta r non è parallela a π, e a maggior ragione non può essere contenuta in π. Il punto $P = (1, 0 - 2)$ appartiene sia a r che a π, dunque l'unica affermazione corretta è (d).

4. Si considerino nello spazio le rette di equazione parametrica

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -1 - t \end{cases} \qquad\qquad s : \begin{cases} x = t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = 2 + t' \end{cases}$$

provare che r e s sono sghembe.

Iniziamo osservando che la direzione di r è $d_r = (1, 1, -1)$, mentre quella di s è $d_s = (1, 2, 1)$, quindi r e s non sono parallele.
Cerco un eventuale punto di intersezione tra r e s, conviene portare r:

$$r : \begin{cases} x = 1 + y \\ z = -1 - y \end{cases}$$

intersecando con s si ottiene

$$\begin{cases} t' = 1 + 1 + 2t' \\ 2 + t' = -1 - 1 - 2t' \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} t' = -2 \\ 3t' = -4 \end{cases}$$

che è impossibile; dunque le rette r e s sono sghembe.