Nome e cognome:
Matricola:

8/8	8/8	8/8	8/8	32/30

Matematica del discreto

M1 - Insiemi numerici

25 gennaio 2014 - Laurea on line

1. Elencare tutti gli elementi di $\mathbb{Z}_9$ che ammettono inverso (moltiplicativo) e per ognuno di essi calcolarlo.

   Gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_9$ *sono le classi di resto* $[n]_9$ *con* $1 \leq n \leq 8$ *e* n *primo con 9, ovvero*

   $$[1]_9,\ [2]_9,\ [4]_9,\ [5]_9,\ [7]_9,\ [8]_9$$

   si ha poi

   $$\begin{aligned}
   &[1]_9^{-1} = [1]_9,\\
   &[2]_9^{-1} = [5]_9 \textit{ infatti } [2]_9 \cdot [5]_9 = [1]_9,\\
   &[4]_9^{-1} = [7]_9 \textit{ infatti } [4]_9 \cdot [7]_9 = [1]_9,\\
   &[5]_9^{-1} = [2]_9 \textit{ infatti dal calcolo precedente } [5]_9^{-1} = ([2]_9^{-1})^{-1} = [2]_9,\\
   &[7]_9^{-1} = [4]_9 \textit{ infatti dal calcolo precedente } [7]_9^{-1} = ([4]_9^{-1})^{-1} = [4]_9,\\
   &[8]_9^{-1} = [8]_9 \textit{ infatti } [8]_9^{-1} = ([-1]_9^{-1}) = -[1]_9 = [8]_9.
   \end{aligned}$$

2. Si consideri il numero razionale $2310,23_4$ scritto in base 4 e si dica a quale numero in base 16 corrisponde senza passare attraverso la sua espressione in base 10. Si dica infine a quale numero in base 10 corrisponde.

   Osserviamo che $16 = 4^2$, *abbiamo allora*

$$\begin{aligned} 2310,23_4 =& 3 \cdot 4^{-2} + 2 \cdot 4^{-1} + 0 \cdot 4^0 + 1 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^3 = \\ & 3 \cdot 4^{-2} + 2 \cdot 4 \cdot 4^{-2} + 0 \cdot 4^0 + 1 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 4^2 = \\ & (3+8) \cdot 16^{-1} + (0+4) \cdot 16^0 + (3+8) \cdot 16^1 = \\ & \mathrm{B4}, \mathrm{B}_{16} \end{aligned}$$

   Infatti

$$\begin{aligned} & 2310,23_4 = 3 \cdot 4^{-2} + 2 \cdot 4^{-1} + 0 \cdot 4^0 + 1 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^3 = 180,6875_{10}, \\ & \mathrm{B4}, \mathrm{B}_{16} = 11 \cdot 16^{-1} + 4 \cdot 16^0 + 11 \cdot 16^1 = 180,6875_{10}. \end{aligned}$$

3. Determinare il più grande numero naturale $k \leq 100$ per cui l'equazione diofantea

$$15x + 27y = k$$

ammette soluzione e per tale valore risolverla.

Un'equazione diofantea del tipo $ax + by = c$ è risolubile se e solo se $MCD(a, b)$ divide c; nel nostro caso l'equazione è risolubile se e solo se $MCD(15, 27) = 3$ divide k. Il valore richiesto di k è quindi il più grande multiplo di 3 più piccolo di 100, ovvero 99. Allora dobbiamo risolvere

$$15x + 27y = 99$$

che è equivalente a

$$5x + 9y = 33.$$

Il massimo comun divisore tra 5 e 9 è 1 e, dall'identità di Bézout, si ha $1 = 5 \cdot 2 + (-1) \cdot 9$. Allora la coppia $(2, -1)$ è una soluzione particolare dell'equazione diofantea $5x+9y = 1$, ma poiché dobbiamo risolvere l'equazione $5x + 9y = 33$, dobbiamo moltiplicare il risultato per 33, ottenendo la soluzione particolare $(66, -33)$. Tutte le altre soluzioni si ottengono da quella trovata nel seguente modo:

$$(66 + kn, -33 - hn), \quad n \in \mathbb{Z}$$

dove $k = 9/MCD(5, 9)$ e $h = 5/MCD(5, 9)$, ovvero

$$(66 + 9n, -33 - 5n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Infatti

$$15 \cdot (66 + 9n) + 27 \cdot (-33 - 5n) = 15 \cdot 66 + 15 \cdot 9n - 27 \cdot 33 - 27 \cdot 5n = 990 - 891 = 99.$$

4. Sia $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ l'insieme dei numeri reali positivi. Rispondere alle seguenti domande giustificando la risposta.

   (a) La funzione $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ che ad ogni coppia (b, h) associa l'area di un rettangolo di base b e altezza h, è una biiezione?

   (b) La relazione $\sharp$ su $\mathbb{R}^+$ definita da $p \sharp a$ se e solo se esiste un rettangolo che ha perimetro p e area a, è una funzione?

(a) Iniziamo osservando che effettivamente g è una funzione in particolare $g(b, h) = b \cdot h$. È suriettiva, infatti ogni numero reale positivo x può essere l'area di un rettangolo, basta considerare il rettangolo di base x e altezza 1. Tuttavia non è iniettiva, infatti esistono rettangoli con diversa base e altezza che hanno la stessa area.

(b) La relazione data è ovunque definita ma non è funzionale. È ovunque definita, infatti per ogni $p \in \mathbb{R}^+$, posso costruire un rettangolo di perimetro p e area, ad esempio, 0: basta considerare una base lunga $p/2$ e altezza 0. Quindi per ogni $p \in \mathbb{R}^+$ si ha $p\sharp 0$. Non è funzionale perché esistono rettangoli con ugual perimetro ma area diversa (ad esempio quello di base 1 e altezza 1 e quello di base 2 e altezza 0); ne segue che $\sharp$ non è una funzione.