Nome e cognome:
Matricola:

8/8	8/8	8/8	8/8	32/30

Matematica del discreto

M2 - Gruppi, anelli e campi

25 gennaio 2014 - Laurea on line

1. Sull'insieme $G = \{a, b, c, d\}$ è definita un'operazione $*$ di cui si sa che $a * b = c$ e $a * c = d$, che è commutativa e che $(G, *)$ è un gruppo. Completare la tavola di Cayley di $*$. A quale gruppo noto è isomorfo $(G, *)$?

*	a	b	c	d
a		c	d	
b				
c				
d				

Iniziamo osservando che per la commutatività si ha $b * a = c$ e $c * a = d$. Inoltre a non è l'elemento neutro, altrimenti $a * b = b$, b non è l'elemento neutro, altrimenti $a * b = a$, c non è l'elemento neutro, altrimenti $a * c = a$, ne segue che d è l'elemento neutro. Inserisco queste informazioni nella tavola e ottengo

$*$	a	b	c	d
a		c	d	a
b	c			b
c	d			c
d	a	b	c	d

Necessariamente deve essere $a * a = b$, da cui, sfruttando la proprietà associativa si ha $b * b = (a * a) * b = a * (a * b) = a * c = d$.

$*$	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	c	d		b
c	d			c
d	a	b	c	d

Non resta che completare la tavola facendo in modo che su ogni riga e ogni colonna compaiano tutti gli elementi del gruppo senza ripetizioni, perciò

$*$	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	c	d	a	b
c	d	a	b	c
d	a	b	c	d

L'elemento a è un generatore di $(G, *)$, che quindi risulta essere un gruppo ciclico di 4 elementi, e dunque isomorfo a $(\mathbb{Z}_4, +)$.

2. Scrivere come prodotto di cicli disgiunti la permutazione π di S_{11}

$$\pi = (1\ 3\ 2\ 4)(2\ 4\ 3\ 6)(5\ 6\ 8\ 10)(11\ 8\ 7)$$

e determinarne il periodo. Esiste una permutazione di S_{11} di periodo 18?

eseguendo il prodotto da destra a sinistra delle quattro permutazioni si ottiene

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
						11	7			8
				6	8				5	10
	4	6	3	2						
3	1		2	4						
3	1	6	2	4	8	11	7	9	5	10

quindi $\pi = (1\,3\,6\,8\,7\,11\,10\,5\,4\,2)$ *(9 non compare poiché rimane fisso). L'ordine di* π *è il massimo comune multiplo tra le lunghezze dei cicli disgiunti in cui si fattorizza, che è 10. In* S_{11} *esistono permutazioni di ordine 18, basta che si fattorizzino come prodotto di cicli disgiunti il cui massimo comune multiplo sia 18 e la somma delle lunghezze di tutti i cicli sia minore o uguale a 11, ad esempio la permutazione* $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)(10\ 11)$ *ha ordine 18.*

3. Dire per ognuna delle strutture seguenti se è un anello giustificando la risposta:

   (a) $(\mathbb{N}, +, \times)$;
   (b) $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, +, \times)$;
   (c) $(\mathbb{Z}[x], +, \times)$;
   (d) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +, \times)$.

(a) $(\mathbb{N}, +, \times)$ *non è un anello, infatti* $(\mathbb{N}, +)$ *non è un gruppo poiché non contiene gli opposti dei suoi elementi;*

(b) $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, +, \times)$ *non è un anello, infatti* $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, +)$ *non è neppure una struttura algebrica poiché non è chiuso, infatti contiene* 2 *e* -1, *ma non contiene* $2 + (-1)$, *lo stesso vale anche per* $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, \times)$*;*

(c) $(\mathbb{Z}[x], +, \times)$ *è un anello, l'anello dei polinomi a coefficienti interi nell'indeterminata* x*;*

(d) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +, \times)$ *non è un anello, infatti* $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$ *non è neppure una struttura algebrica poiché non è chiuso, infatti contiene* 1 *e* -1, *ma non contiene* $1 + (-1)$, *osserviamo però che in questo caso* $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$ *è un gruppo abeliano.*

4. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ -x + 5y + 2z = 5 \\ x - z = 2 \end{cases}$$

e lo si risolvi nel caso in cui i coefficienti sono considerati in $\mathbb{Q}$, in $\mathbb{Z}_2$ e in $\mathbb{Z}_5$.

Si potrebbero considerare i tre casi separatamente, ma è più conveniente semplificare il sistema con il metodo di Gauss-Jordan scambiando ad ogni passaggio in modo opportuno le righe in modo da evitare sempre di fare divisioni, così da non far riferimento al campo dei coefficienti, e solo alla fine considerare il campo dei coefficienti.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{I \leftrightarrows III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[III-2I]{II+I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{II \leftrightarrows III}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{III-5II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -14 & 12 \end{array}\right)$$

Allora il sistema dato è equivalente a

$$\begin{cases} x - z = 2 \\ y + 3z = -1 \\ -14z = 12 \end{cases}$$

In $\mathbb{Q}$ *si ottiene immediatamente per sostituzione all'indietro l'unica soluzione* $(20/7, -25/7, -6/7)$.
In $\mathbb{Z}_2$ *il sistema è diventa*

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

che ha come insieme delle soluzioni $S = \{([x]_2, [x+1]_2, [x]_2) \mid x \in \mathbb{Z}_2\}$, *ovvero* $([0]_2, [1]_2, [0]_2)$ *e* $([1]_2, [0]_2, [1]_2)$.
In $\mathbb{Z}_5$ *il sistema diventa*

$$\begin{cases} x + 4z = 2 \\ y + 3z = 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $([4]_5, [3]_5, [2]_5)$.