Nome e cognome:
Matricola:

8/8	8/8	8/8	8/8	32/30

Matematica del discreto

M3 - Vettori e geometria

25 gennaio 2014 - Laurea on line

1. Dati i vettori nello spazio $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, 1, 3)$ e $w = (3, -1, 2)$, calcolare
   (a) $(u - v) \cdot w$;
   (b) l'angolo formato da u e w;
   (c) $\|w\|$;
   (d) $u \times v$ e $v \times u$.

(a) $(u - v) \cdot w = (-1, 0 - 2) \cdot (3, -1, 2) = -7$*;*

(b) sia θ *l'angolo formato da* u *e* w*, si ha*

$$\cos(\theta) = \frac{u \cdot w}{\|u\|\|w\|} = \frac{(1,1,1) \cdot (3,-1,2)}{\|(1,1,1)\|\|(3,-1,2)\|} = \frac{4}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{14}} = \frac{\sqrt{42}}{21}$$

allora $\theta = \arccos(\sqrt{42}/21)$*;*

(c) $\|w\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$*;*

(d)

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (2, -1, -1)$$

mentre $v \times u = -(u \times v) = (-2, 1, 1)$*.*

2. Verificare che le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \end{cases}$$

rappresentano la stessa retta nel piano.

La forma cartesiana della prima retta è $y = x/2 + 1/2$, che è equivalente a $2y = x + 1$, ovvero la forma cartesiana della seconda retta.

3. La retta di equazioni

$$\begin{cases} y - 2x = 0 \\ z - 3x + 1 = 0 \end{cases}$$

è perpendicolare al piano

- ☐ $3x + z = 3$;
- ☐ $x - 2y + 3z = 0$;
- ☐ $3x - 2y = 5$;
- ☒ $x + 2y + 3z = 4$.

Indicare la risposta corretta fornendone una giustificazione.

La risposta corretta è la quarta, infatti la retta data si scrive in forma parametrica come

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t - 1 \end{cases}$$

e perciò ha direzione parallela al vettore $(1, 2, 3)$, *che è appunto il vettore normale al piano* $x + 2y + 3z = 4$.

4. Dati i punti $A = (2, -3, 1)$ e $B = (2, 1, -3)$, provare che la retta per A e B è perpendicolare all'asse x, ma è sghemba con esso.

La retta r_{AB} *per* A *e* B *ha equazione parametrica* $P = t \cdot (B - A) + A$*, ovvero*

$$r_{AB} : \begin{cases} x = 2 \\ y = 4t - 3 \\ z = -4t + 1 \end{cases}$$

che ha direzione parallela al vettore $(0, 1, -1)$*, a sua volta perpendicolare alla direzione dell'asse* x*, che è* $(0, 1, 1)$ *(infatti* $(0, 1, -1) \cdot (0, 1, 1) = 0$*). Ne segue che le due rette sono perpendicolari tra loro. Tuttavia sono sghembe poiché non hanno punti in comune: lo si può mostrare risolvendo il sistema lineare dato dall'intersezione tra le due rette oppure osservando che i punti sull'asse* x *hanno la proprietà di avere ordinata e quota uguali, e l'unico punto della retta* r_{AB} *con questa proprietà è* $(2, -1, -1)$*, che non appartiene all'asse* x*.*