Nome e cognome:
Matricola:

8/8	8/8	8/8	8/8	32/30

Matematica del discreto

M4 - Spazi vettoriali e omomorfismi

25 gennaio 2014 - Laurea on line

1. Sia X il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $(1, -1, 2)$ e $(-3, 3, 2)$ e Y quello generato dai vettori $(1, 1, 1)$ e $(2, 0, -3)$. Determinare la dimensione e una base di $X \cap Y$ e di $X + Y$.

   Entrambi i sottospazi hanno dimensione 2, poiché generati da vettori non proporzionali, e quindi geometricamente sono 2 piani passanti per l'origine. La loro somma è generata dai vettori $(1, -1, 2)$, $(-3, 3, 2)$, $(1, 1, 1)$ *e* $(2, 0, -3)$, *che tuttavia non formano una base, poiché non sono tra loro linearmente indipendenti. La matrice che ha per righe i primi tre vettori ha determinante diverso da zero, ne segue che* $\{(1, -1, 2), (-3, 3, 2), (1, 1, 1)\}$ *è una base per* $X + Y$, *che dunque ha dimensione 3. Dalla formula di Grassmann l'intersezione ha dimensione 1 (lo si può osservare anche geometricamente: da quanto detto prima* X *e* Y *sono piani passanti per l'origine non coincidenti, dunque si intersecano in una retta). Per trovare una base dell'intersezione si può determinare le equazioni parametriche di* X *e* Y, *e poi intersecarle.* X *è un piano la cui normale* $n_X = (a, b, c)$ *è perpendicolare a* $(1, -1, 2)$ *e* $(-3, 3, 2)$, *quindi*

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, -1, 2) = a - b + 2c = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-3, 3, 2) = -3a + 3b + 2c = 0 \end{cases}$$

   risolvendo si ha che n_X *è multiplo del vettore* $(1, 1, 0)$. *Procedendo in modo analogo per* Y *si ha che* n_Y *è multiplo di* $(3, -5, 2)$. *Allora* $X \cap Y$ *è uguale a*

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - 5y + 2z = 0 \end{cases}$$

   Risolvendo il sistema si ottiene che la direzione della retta $X \cap Y$ *è parallela al vettore* $(1, -1, 4)$, *che forma dunque una base.*

2. Determinare immagine e nucleo dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z, t) = (x + y - z, 2y - t, 3x + z + t).$$

La dimensione dell'immagine è il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il determinante della sottomatrice ottenuta considerando le prime 3 colonne è diverso da zero, dunque l'immagine ha dimensione 3 in $\mathbb{R}^3$*, cioè è* $\mathbb{R}^3$ *e una sua base è una qualunque base di* $\mathbb{R}^3$ *(si può per esempio considerare la base canonica). Dal teorema di nullità+rango segue che la dimensione del nucleo è 1. Il nucleo è l'insieme delle soluzioni del sistema* $Av = \underline{0}$*, risolvendo si ottiene che (ad esempio)* $\{(-3, 4, 1, 8)\}$ *è una sua base.*

3. Calcolare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il rango della matrici

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 0 & k & -1 \\ -2 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice può essere solo 2 o 3, infatti la sottomatrice ottenuta considerando prima e terza riga e seconda e terza colonna ha determinante sempre uguale a 1 (ovvero le ultime due colonne sono vettori sempre linearmente indipendenti). Se il determinante di A è nullo, allora ha rango 2, in caso contrario ha rango 3. Il determinante di A è $k(k^2 - 1)$, che si annulla solo per $k \in \{0, 1, -1\}$: per tali valori il rango è 2, 3 in tutti gli altri casi.

4. Determinare per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ è diagonalizzabile la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 1 & -2t & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A è triangolare inferiore, quindi i suoi autovalori sono i coefficienti sulla diagonale principale: 0 con molteplicità algebrica 1, e 1 con molteplicità algebrica 2. Allora A è diagonalizzabile se e solo se la molteplicità geometrica di 1 è 2, cioè se il sistema lineare $(A-I)v = \underline{0}$ ha ∞^2 soluzioni, questo accade se e solo se il rango di $A - I$ è uguale a 1. Poiché $A - I$ è uguale a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 1 & -2t & 0 \end{pmatrix}$$

può avere rango 1 se e solo se la sottomatrice ottenuta considerando seconda e terza riga e prima e seconda colonna ha determinante nullo, ovvero se e solo se $-2t^2 = 0$, ovvero se e solo se $t = 0$. Riassumendo: la matrice A è diagonalizzabile solo nel caso $t = 0$.