Nome e cognome:
Matricola:

8/8	8/8	8/8	8/8	32/30

Matematica del discreto

M3 - Vettori e geometria

15 marzo 2014 - Laurea on line

1. Dati i vettori nello spazio $u = (1, 1, 0)$, $v = (2, 1, -2)$ e $w = (2, -1, 2)$, calcolare
   (a) $(u - v) \cdot w$;
   (b) l'angolo formato da u e v;
   (c) $\|w\|$;
   (d) $u \times v$ e $v \times u$.

(a) $(u - v) \cdot w = (-1, 0, 2) \cdot (2, -1, 2) = 2$;

(b) *sia* θ *l'angolo formato da* u *e* w, *si ha*

$$\cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{(1,1,0)\cdot(2,-1,2)}{\|(1,1,0)\|\|(2,-1,2)\|} = \frac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

allora $\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$;

(c) $\|w\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$;

(d)

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2, 2, -1)$$

mentre $v \times u = -(u \times v) = (2, -2, 1)$.

2. Scrivere l'equazione della retta del piano passante per il punto $P = (3, -5)$ perpendicolare al vettore $v = (4, 2)$.

   Per ogni valore di $c \in \mathbb{R}$ *la retta*
$$4x + 2y = c$$
   è perpendicolare al vettore v*, imponendo il passaggio per* P *si ottiene la retta*
$$4x + 2y = 2$$
   ovvero
$$2x + y = 1.$$

3. La retta r di equazioni

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

è perpendicolare al piano

- ☐ $x + y + z = 2$;
- ☐ $x - 2y - 2z = 2$;
- ☐ $2x - y - 2z = 2$;
- ☐ $2x - y + z = 2$.

Indicare la risposta corretta fornendo una giustificazione.

La risposta corretta è la quarta, infatti la retta data si scrive in forma parametrica come

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -t + 1 \\ z = t - 1 \end{cases}$$

e perciò ha direzione parallela al vettore $(2, -1, 1)$*, che è appunto il vettore normale al piano* $2x - y + z = 2$.

4. Sia r la retta che passa per i punti $A = (3, 0, 4)$ e $B = (-1, 2, -2)$ ed s quella passante per $C = (2, 2, 5)$ e $D = (0, 0, -3)$. Dimostrare che r ed s si incontrano e trovare le coordinate del loro punto comune.

La retta r_{AB} per A e B ha equazione parametrica $P = t \cdot (B - A) + A$, ovvero

$$r_{AB} : \begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 2t \\ z = 4 - 6t \end{cases}$$

mentre la retta r_{CD} per C e D ha equazione parametrica $P = t \cdot (C - D) + D$, ovvero

$$r_{AB} : \begin{cases} x = 2t' \\ y = 2t' \\ z = -3 + 8t' \end{cases}$$

osserviamo anche immediatamente che le due rette non sono parallele. Cerco l'eventuale punto di intersezione mettendo a sistema l'equazioni delle due rette, si ha

$$\begin{cases} 3 - 4t = 2t' \\ 2t = 2t' \\ 4 - 6t = -3 + 8t \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ha $t = t'$, sostituendo nella prima si trova $t = 1/2$ che verifica anche la terza. Allora le due rette si intersecano nel punto che si ottiene sostituendo a t nell'equazione di r_{AB} o a t' nell'equazione di r_{CD} il valore $1/2$, si ottiene il punto di coordinate $(1, 1, 1)$.