Nome e cognome:
Matricola:

8/8	8/8	8/8	8/8	32/30

Matematica del discreto

M4 - Spazi vettoriali e omomorfismi

15 marzo 2014 - Laurea on line

1. Sia X il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $(2,-2,2)$ e $(-3,3,3)$ e Y quello generato dai vettori $(-1,1,1)$ e $(2,0,0)$. Determinare la dimensione e una base di $X \cap Y$ e di $X+Y$.

   Entrambi i sottospazi hanno dimensione 2, poiché generati da vettori non proporzionali, e quindi geometricamente sono 2 piani passanti per l'origine. La loro somma è generata dai vettori $(2,-2,2)$, $(-3,3,3)$, $(-1,1,1)$ e $(2,0,0)$, che tuttavia non formano una base, poiché non sono tra loro linearmente indipendenti. La matrice che ha per righe i primi due vettori e il quarto ha determinante diverso da zero, ne segue che $\{(2,-2,2),(-3,3,3),(2,0,0)\}$ è una base per $X+Y$, che dunque ha dimensione 3. Dalla formula di Grassmann l'intersezione ha dimensione 1 (lo si può osservare anche geometricamente: da quanto detto prima X e Y sono piani passanti per l'origine non coincidenti, dunque si intersecano in una retta). Per trovare una base dell'intersezione si può determinare le equazioni parametriche di X e Y, e poi intersecarle. X è un piano la cui normale $n_X = (a,b,c)$ è perpendicolare a $(2,-2,2)$ e $(-3,3,3)$, quindi

$$\begin{cases} (a,b,c)\cdot(2,-2,2) = 2a-2b+2c = 0 \\ (a,b,c)\cdot(-3,3,3) = -3a+3b+3c = 0 \end{cases}$$

   risolvendo si ha che n_X è multiplo del vettore $(1,1,0)$. Procedendo in modo analogo per Y si ha che n_Y è multiplo di $(0,1,-1)$. Allora $X \cap Y$ è soluzione del sistema

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

   Risolvendo il sistema si ottiene che la direzione della retta $X \cap Y$ è parallela al vettore $(1,-1,-1)$, che forma dunque una base.

2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x di grado al più 2, dire se l'insieme

$$\{1-2x, 1+x^2, 1+x+x^2\}$$

è un sistema di generatori e se i 3 vettori dati sono tra loro linearmente indipendenti. In caso affermativo determinare le componenti del vettore $-5x-x^2$ in tale sistema.

Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2[x]$ ha dimensione 3, dunque se i tre vettori $1-2x$, $1+x^2$ e $1+x+x^2$ sono linearmente indipendenti, essi formano una base. Se l'unica soluzione dell'equazione polinomiale

$$a(1-2x)+b(1+x^2)+c(1+x+x^2)=0$$

è quella nulla, cioè $a=b=c=0$, allora i tre vettori sono linearmente indipendenti (si osservi che le incognite dell'equazione sono a, b e c). Svolgendo i conti si ha

$$(a+b+c)+(-2a+c)x+(b+c)x^2=0$$

e questo succede se e solo se

$$\begin{cases} a+b+c & =0 \\ -2a+c & =0 \\ b+c & =0 \end{cases}$$

che ha $a=b=c=0$ come unica soluzione.
Poiché $\{1-2x, 1+x^2, 1+x+x^2\}$ è una base, ha senso chiederai quali sono le coordinate del vettore $-5x-x^2$ rispetto tale base: la terna (a,b,c) rappresenta le coordinate di $-5x-x^2$ rispetto alla base $\{1-2x, 1+x^2, 1+x+x^2\}$ se $a(1-2x)+b(1+x^2)+c(1+x+x^2)=-5x-x^2$. Procedendo in modo analogo al caso precedente, si perviene al sistema

$$\begin{cases} a+b+c & =0 \\ -2a+c & =-5 \\ b+c & =-1 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione la terna $(1,2,-3)$ che rappresenta le coordinate cercate.

3. Determinare la matrice dell'omomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x, y, z) = (x + y, x - y, y + z)$$

se la base del dominio e del codominio è $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$.

Per trovare tale matrice dobbiamo esprimere le immagini dei vettori della base $\mathcal{B}$ usando i vettori della stessa base, allora

$$\begin{aligned} f(1, 1, 1) &= (2, 0, 2)_{\mathcal{E}}, \\ f(1, 0, 1) &= (1, 1, 1)_{\mathcal{E}}, \\ f(0, 0, 1) &= (0, 0, 1)_{\mathcal{E}}, \end{aligned}$$

dove il pedice $_{\mathcal{E}}$ indica che le componenti sono espresse rispetto alla base canonica. Rispetto alla base richiesta $\mathcal{B}$ si ha invece

$$\begin{aligned} f(1, 1, 1) &= (2, 0, 2)_{\mathcal{E}} = (0, 2, 0)_{\mathcal{B}}, \\ f(1, 0, 1) &= (1, 1, 1)_{\mathcal{E}} = (1, 0, 0)_{\mathcal{B}}, \\ f(0, 0, 1) &= (0, 0, 1)_{\mathcal{E}} = (0, 0, 1)_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

La matrice richiesta è quella che ha per colonne *le coordinate delle immagini dei vettori della base $\mathcal{B}$ rispetto a $\mathcal{B}$, dunque la matrice richiesta è*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Determinare autovalori e autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

stabilendo se è diagonalizzabile.

Gli autovalori di A sono i $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che $\det(A - \lambda I) = 0$, ovvero

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Il determinante a sinistra si può calcolare direttamente o osservare che sommando ad una riga (o colonna) il multiplo di un'altra riga (o colonna), il determinante non cambia, perciò

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ \lambda & 1-\lambda & \lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ \lambda & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(1-\lambda).$$

Gli autovalori sono 0 con molteplicità algebrica 2 e 1 con molteplicità algebrica 1. Se la molteplicità geometrica di 0 è 2, allora gli autovalori sono tutti regolari e la matrice è diagonalizzabile. La molteplicità geometrica di 0 è la dimensione del sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $(A - 0 \cdot I) \cdot v = \underline{0}$, ovvero

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

che è equivalente all'unica equazione $x + y + z = 0$, che è l'equazione di un piano in $\mathbb{R}^3$ e dunque ha dimensione 2: la matrice A risulta diagonalizzabile.