Nome e cognome:
Matricola:

Matematica del discreto

M1 - Insiemi numerici

10 maggio 2014 - Laurea on line

1. Elencare tutti gli elementi di $\mathbb{Z}_{15}$ che ammettono inverso (moltiplicativo) e per ognuno di essi calcolarlo.

   Gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{15}$ *sono le classi di resto* $[n]_{15}$ *con* $1 \leq n \leq 14$ *e* n *primo con 15, ovvero*

$$[1]_{15},\ [2]_{15},\ [4]_{15},\ [7]_{15},\ [8]_{15},\ [11]_{15},\ [13]_{15},\ [14]_{15}$$

   si ha poi

$$
\begin{aligned}
&[1]_{15}^{-1} = [1]_{15},\\
&[2]_{15}^{-1} = [8]_{15} \textit{ infatti } [2]_{15} \cdot [8]_{15} = [1]_{15},\\
&[4]_{15}^{-1} = [4]_{15} \textit{ infatti } [4]_{15} \cdot [4]_{15} = [1]_{15},\\
&[7]_{15}^{-1} = [13]_{15} \textit{ infatti } [7]_{15}^{-1} \cdot [13]_{15} = [1]_{15},\\
&[8]_{15}^{-1} = [2]_{15} \textit{ infatti dal calcolo precedente } [8]_{15}^{-1} = ([2]_{15}^{-1})^{-1} = [2]_{15},\\
&[11]_{15}^{-1} = [11]_{15} \textit{ infatti } [11]_{15}^{-1} \cdot [11]_{15} = [1]_{15},\\
&[13]_{15}^{-1} = [7]_{15} \textit{ infatti dal calcolo precedente } [13]_{15}^{-1} = ([7]_{15}^{-1})^{-1} = [7]_{15},\\
&[14]_{15}^{-1} = [14]_{15} \textit{ infatti } [14]_{15}^{-1} = [-1]_{15}^{-1} = [-1]_{15}.
\end{aligned}
$$

2. Mostrare per induzione che per ogni $n \geq 0$ vale l'uguaglianza

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Per $n = 0$ il risultato è immediato, sia ora $n \geq 1$ e si supponga verificato il risultato per tutti i valori più piccoli di n, allora:

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1} + 3^n \overset{ip.\ ind.}{=} \frac{3^n - 1}{2} + 3^n = \frac{3 \cdot 3^n}{2} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

da cui la tesi.

3. Risolvere il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv 4 \pmod 5 \\ x \equiv 3 \pmod 8 \end{cases}$$

La soluzione è unica modulo $3 \cdot 5 \cdot 8$ *(poiché 3, 5 e 8 sono primi tra loro). Applicando il teorema cinese del resto, o anche per calcolo diretto, si ha che 19 è una soluzione particolare, ne segue che le soluzioni sono tutti gli interi della forma* $19 + 120k$, *con* $k \in \mathbb{Z}$.

4. Calcolare il gaussiano di 43 e il periodo delle frazioni $\frac{41}{43}$ e $\frac{44}{43}$.

Da calcole esplicito si ha che il gaussiano di 43 è 21 (si osservi che $\phi(43) = 42$ *e 21 divide 42), dunque anche il periodo delle frazioni date (si osservi che numeratore e denominatore sono primi tra loro) è 21.*