Nome e cognome:
Matricola:

Matematica del discreto

M3 - Vettori e geometria

10 maggio 2014 - Laurea on line

1. Dati i vettori nello spazio $u = (2, 3, -1)$, $v = (1, 1, 5)$ e $w = (2, 1, 3)$, calcolare
   (a) $((u - v) \cdot w) \cdot u$;
   (b) l'angolo formato da u e v;
   (c) $\|w - u\|$;
   (d) $u \times v$ e $v \times u$.

(a) $(u - v) \cdot w = ((1, 2, -6) \cdot (2, 1, 3)) \cdot u = -14 \cdot u = (-28, -42, 14)$;

(b) *sia θ l'angolo formato da u e v, si ha*

$$\cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{(2, 3, -1) \cdot (1, 1, 5)}{\|(2, 3, -1)\|\|(1, 1, 5)\|} = \frac{0}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{14}} = 0$$

allora $\theta = \frac{\pi}{2}$ e i due vettori sono perpendicolari;

(c) $\|w - u\| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$;

(d)

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (16, -11, -1)$$

mentre $v \times u = -(u \times v) = (-16, 11, 1)$.

2. Determinare l'equazione delle retta:

   (a) passante per i punti $A = (1, 1)$ e $B = (-1, 4)$;

   (b) passante per il punto $C = (2, 4)$ e parallela al vettore $v = (1, 4)$;

   (c) perpendicolare alla retta $x + y - 1 = 0$ e passante per il punto $D = (-1, 2)$.

(a) *La retta ha direzione proporzionale a* $A - B = (2, -3)$, *dunque ha equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -3t + 1 \end{cases}$$

(b) *Procedendo analogamente al precedente, la retta richiesta ha equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 4t + 4 \end{cases}$$

(c) *La retta* $x + y - 1 = 0$ *è perpendicolare al vettore* $(1, 1)$, *dunque la retta richiesta è parallela a tale vettore, ne segue che le sue equazioni parametriche sono*

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t + 2 \end{cases}$$

3. Le rette

$$r : \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x - y + z = -6 \end{cases}$$

sono

☐ complanari;

☐ sghembe;

☒ parallele;

☐ perpendicolari;

☐ incidenti.

Indicare la risposta corretta (eventualmente più d'una) fornendo una giustificazione.

Un modo per studiare la posizione tra le due rette è quello di determinarne le direzioni: se risultano proporzionali le rette saranno parallele (o eventualmente coincidenti), altrimenti incidenti o sghembe.
Per determinare le direzioni delle rette possiamo trovare un'equazione parametrica per r e s:

(r) *introduciamo un parametro ponendo, per esempio $x = t$, si ha*

$$\begin{cases} z = 1 + y - 2t \\ z = t + y - 2 \end{cases}$$

da cui $1 + y - 2t = t + y - 2$, cioè $t = 1$. Questo significa che tutti i punti della retta r hanno la stessa ascissa (cioè 1), non è dunque possibile porre x uguale ad un parametro, proviamo a introdurre il parametro ponendo $y = t$ (e $x = 1$):

$$\begin{cases} z = 1 + t - 2 \\ z = 1 + t - 2 \end{cases}$$

si ottiene allora un'equazione parametrica per r:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t - 1 \end{cases}$$

la direzione di r è quindi (proporzionale a) $d_r = (0, 1, 1)$.

(s) *si procede come per r, si ottiene l'equazione parametrica*

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = t \\ z = t - 9 \end{cases}$$

da cui si ottiene la direzione di s che è $d_s = (0, 1, 1)$.

Poiché r e s hanno direzioni proporzionali e certamente non hanno punti in comune (infatti tutti i punti di r hanno ascissa 1, mentre quelli di s hanno tutti ascissa 3), le due rette sono parallele e non coincidenti.

4. Si consideri la retta

$$r : \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

e il punto $P = (3, -1, 2)$. Trovare l'equazione cartesiana del piano π perpendicolare a r e passante per P. Trovare il punto di intersezione Q tra r e π. Calcolare la distanza tra r e P.

Si osservi che la retta data è la stessa dell'esercizio precedente, dunque di essa conosciamo già la direzione che è proporzionale a $(0, 1, 1)$.
Poiché π è perpendicolare a r, la sua normale è proporzionale a $(0, 1, 1)$, dunque π ha equazione cartesiana $y + z = d$ dove d è tale per cui $P \in \pi$, dunque $-1 + 2 = d$, da cui

$$\pi : y + z = 1.$$

Il punto Q si ottiene risolvendo il sistema

$$Q : \begin{cases} x = 1 \\ z = y - 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

da cui $Q = (1, 1, 0)$ (si noti che

$$\begin{cases} x = 1 \\ z = y - 1 \end{cases}$$

sono effettivamente delle equazioni cartesiane di r).
Per costruzione la distanza tra r e P è la stessa di quella tra Q e P (poiché $Q \in r$ e $P - Q$ è perpendicolare a r), dunque

$$d(P, r) = d(P, Q) = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$