Nome e cognome:
Matricola:

Matematica del discreto

M4 - Spazi vettoriali e omomorfismi

10 maggio 2014 - Laurea on line

1. Calcolare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   Si potrebbe pensare di ridurre a scala la matrice A e contare le righe non nulle, tuttavia in questo caso non ce n'è bisogno: la prima colonna è il doppio della seconda e le ultime due sono uguali, ne segue che ci sono al più due colonne linearmente indipendenti. Effettivamente la seconda e la terza colonna non sono una multiplo dell'altra, dunque il rango della matrice è 2.

2. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori

$$v_1 = (1, 1, 0, 0),\ v_2 = (-3, 2, 1, 2k)$$

dove $k \in \mathbb{R}$. Dire al variare di k qual è la dimensione di U e dire se esistono valori di k per cui il vettore $u = (1, 1, 1, 1)$ appartiene ad U.

I vettori v_1 e v_2 non possono essere proporzionali, infatti le prime due componenti di v_1 sono uguali tra loro, e se v_2 fosse proporzionale a v_1 anche le prime due componenti di v_2 dovrebbero essere uguali, cosa che non è (questo ragionamento è equivalente ad osservare che il minore della matrice che ha per righe v_1 e v_2 individuato dalle prime due colonne è non nullo). Quindi U ha dimensione 2 per ogni valore di k.
Si osservi che u ha le prime due componenti uguali: se fosse combinazione lineare di v_1 e v_2 il coefficiente da dare a v_2 sarebbe 0, ne seguirebbe che u sarebbe multiplo di v_1, che non è. Dunque u non appartiene mai a U.

3. Determinare la matrice dell'omomorfismo $f:\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x,y,z,t) = (2x+y, 4x+2y+z+t, 10x+5y+2z+2t)$$

rispetto alla base canonica. Calcolare la dimensione e una base dell'immagine e del nucleo di f.

La matrice che rappresenta f è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Che è la stessa matrice del primo esercizio. A ha rango 2 e la seconda e terza colonna sono linearmente indipendenti, ne segue che l'immagine di f ha dimensione 2 ed è generata dai vettori $(1,2,5)$ e $(0,1,2)$, che ne formano una base.

Dalla formula di Grassmann, il nucleo di f ha dimensione 2, inoltre per definizione il nucleo è la soluzione del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 2x+7 & = 0 \\ 4x+2y+z+t & = 0 \\ 10x+5x+2z+2t & = 0 \end{cases}$$

che è equivalente a

$$\begin{cases} 2x+y & = 0 \\ z+t & = 0 \end{cases}$$

il cui insieme delle soluzioni è $\{(x,-2x,z,-z) \mid x,z \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,-2,0,0),(0,0,1,-1))$, dunque una sua base è costituita dai vettori $(1,-2,0,0)$ e $(0,0,1,-1)$.

4. Determinare autovalori e autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

stabilendo se è diagonalizzabile.

Gli autovalori di A sono i $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che $\det(A - \lambda I) = 0$, ovvero

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 6 & 12 & 6-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Il determinante a sinistra si può calcolare direttamente o osservare che sommando ad una riga (o colonna) il multiplo di un'altra riga (o colonna), il determinante non cambia, perciò

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 6 & 12 & 6-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -6+\lambda & 12 & 6-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 6-11\lambda & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda^2-8\lambda+2).$$

Poiché $\lambda^2 - 8\lambda + 2$ non è un quadrato, la matrice ha 3 autovalori distinti e dunque regolari, perciò la matrice è diagonalizzabile.