

FISICA - 22 Luglio -

PRIMA PARTE: (1 ora e 30 minuti; 10 punti ogni problema, 5 punti ogni domanda)

- 1) Un oggetto, di massa $M = 50 \text{ kg}$ inizialmente fermo, esplode formando due frammenti. Uno di questi, di massa $m_1 = 30 \text{ kg}$, acquista una velocità $\mathbf{v} = 2\hat{\mathbf{i}} \text{ m/s}$ su un piano orizzontale senza attrito. Assumendo che sia trascurabile la perdita di massa totale, **a)** calcolare la velocità del secondo frammento; **b)** dire, motivando la risposta, quale sarà la velocità del centro di massa dopo l'esplosione.

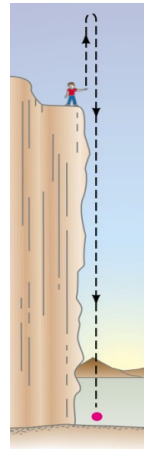
a) Dalla conservazione della quantità di moto $\sum \vec{P}_i = \sum \vec{P}_f$ troviamo la velocità del secondo frammento: $M\vec{V} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \rightarrow \vec{v}_2 = \frac{-m_1}{m_2}\vec{v}_1 \rightarrow \vec{v}_2 = \frac{-30}{20}2\hat{\mathbf{i}} \text{ m/s} = -3\hat{\mathbf{i}} \text{ m/s}$ dove abbiamo considerato che la perdita di massa è trascurabile $M = m_1 + m_2$ e quindi $m_2 = M - m_1 = 50 - 30 = 20 \text{ kg}$ e che l'oggetto era inizialmente fermo $\vec{V} = \vec{0} \text{ m/s}$.

b) La quantità di moto nel centro di massa si deve conservare: $\sum P_{CM,i} = \sum P_{CM,f}$, siccome $P_{CM,i} = M\vec{V} = 0 \text{ kg m/s}$ implica che la velocità del centro di massa dopo

l'esplosione sarà NULLA. Comproviamo: $\vec{v}_{CM,f} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$ e quindi

$$\vec{v}_{CM,f} = \frac{30 \cdot 2 - 20 \cdot 3}{30 + 20} \hat{\mathbf{i}} \text{ m/s} = 0 \hat{\mathbf{i}} \text{ m/s}$$

- 2) Un oggetto di massa $m = 50 \text{ g}$ viene lanciato verticalmente (come in figura) verso l'alto con una velocità $v_0 = 36 \text{ km/h}$. **a)** Trascurando ogni forma di attrito calcolare la quota massima raggiunta e la sua velocità poco prima di toccare il suolo 70 m sotto la quota di partenza. **b)** Sapendo che l'oggetto penetra nel terreno per 10 cm , calcolare la forza media esercitata dal terreno sull'oggetto.



a) Definiamo che la quota massima raggiunta sia H e che l'oggetto viene lanciato di una altezza che la chiamiamo h ed è uguale a 70 m . Sapendo che l'energia meccanica si deve conservare $E_{mecc,i} = E_{mecc,f}$ e prendendo il zero di energia potenziale al suolo (70 m sotto il luogo di lancio dell'oggetto) troviamo che:

La condizione di quota massima raggiunta si darà per una energia cinetica finale uguale a zero:

$$K_i + U_i = K_f + U_f \rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = 0 + mgH \rightarrow H = h + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} = 75 \text{ m}$$

Considerando l'energia meccanica iniziale come quella in quota massima (domanda anteriore) e l'energia meccanica finale come quella subito prima di colpire il suolo

$$K_i + U_i = K_f + U_f \rightarrow 0 + mgH = \frac{1}{2}mv^2 + 0 \rightarrow v = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 75} = 38.7 \text{ m/s} \quad \text{L'energia}$$

potenziale iniziale viene (tutta) trasformata in energia cinetica.

b) La forza media in modulo ($\langle F \rangle$) si può scrivere come segue

$$\langle F \rangle = m\langle a \rangle = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = m \frac{\Delta v^2}{\Delta x} = 0.05 \frac{(38.7 - 0)^2}{0.10} = 749 \text{ N}$$

- 3) Un oggetto di massa $m = 100 \text{ g}$, attaccato ad una molla che ha l'altro estremo vincolato, percorre una traiettoria circolare di raggio $R = 50 \text{ cm}$ su un piano orizzontale senza attrito compiendo 20 giri ogni 10 secondi. **a)** Determinare il periodo, velocità e accelerazione della massa assumendo che il suo moto sia circolare uniforme; **b)** supponendo che la massa della molla sia trascurabile e che la sua lunghezza a riposo sia $l_0 = 20 \text{ cm}$, determinare il valore della sua costante elastica.

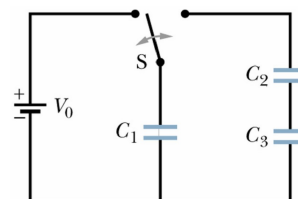
a) la massa ha una frequenza di giro $f = 2 \text{ s}^{-1}$ (due giri al secondo). Il periodo corrisponde all'inversa della frequenza $T = \frac{1}{f} = 0.5 \text{ s}$, la velocità $v = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R f = 2\pi \text{ m/s}$ e l'accelerazione $a = \frac{v^2}{R} = 4\pi^2 R f^2 = 79 \text{ m/s}^2$

b) Dalla seconda legge di Newton:

$$F = ma \rightarrow k \Delta x = m 4\pi^2 R v^2 \rightarrow k = \frac{m 4\pi^2 R f^2}{\Delta x} = 26.3 \text{ N/m}$$

SECONDA PARTE: (1 ora e 30 minuti; 10 punti ogni problema, 5 punti ogni domanda)

- 4) I condensatori di figura hanno capacità $C_1 = 1.5 \mu\text{F}$, $C_2 = C_3 = 6.0 \mu\text{F}$ mentre la f.e.m. del generatore è $V_0 = 10 \text{ V}$. Chiudendo sulla sinistra il commutatore S, C_1 viene caricato completamente mentre C_2 e C_3 rimangono scarichi. **a)** Calcolare l'energia immagazzinata in C_1 . **b)** Assumendo di portare poi S sulla posizione a destra, calcolare le cariche sulle armature di C_1 , C_2 e C_3 .



a) $U_1 = \frac{1}{2} C_1 V_0^2 = 75 \mu\text{J}$

b) La carica elettrica si deve conservare $Q_{\text{iniziale}} = Q_{\text{finale}}$: chiudendo sulla sinistra il commutatore S, C_1 viene caricato completamente $Q_1^a = C_1 V_0 = 15 \mu\text{C}$ (indice superiore "a" si riferisce alla situazione della domanda precedente "a") mentre C_2 e C_3 rimangono scarichi; chiudendo sulla destra il commutatore S, la carica elettrica si distribuisce nei tre condensatori nel seguente modo: l'armatura di sopra di C_1 è collegata via un filo elettrico soltanto con l'armatura di sopra di C_2 , quindi le cariche si muoveranno da una all'altra fino che $Q_1^b = Q_2^b$ (indice superiore "b" si riferisce alla situazione della domanda "b"); l'armatura di sotto di C_1 è collegata con quella di sotto di C_3 , e quindi $Q_1^b = Q_3^b$; in fine, l'armatura di sotto di C_2 è collegata a quella di sopra di C_3 , e quindi $Q_2^b = Q_3^b$. Quindi $Q_{\text{iniziale}} \equiv Q_1^a = C_1 V_0$ e $Q_{\text{finale}} = Q_1^b + Q_2^b + Q_3^b = 3Q$ (dove abbiamo usato $Q_1^b = Q_2^b = Q_3^b \equiv Q$).

Di queste considerazioni troviamo $C_1 V_0 = 3Q \rightarrow Q = \frac{C_1 V_0}{3} = \frac{15}{3} = 5 \mu\text{C}$

- 5) Secondo un modello semiclassico, l'elettrone dell'atomo di idrogeno nello stato fondamentale compie un moto circolare uniforme lungo un'orbita di raggio $r = 0.053 \text{ nm}$ centrata sul protone. Calcolare **a)** la forza che l'elettrone esercita sul protone; **b)** l'energia cinetica e l'energia potenziale dell'elettrone e il periodo del suo moto ($q_e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$; $q_p = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$; $K = 8.99 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$ $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$).

a) Dalla terza legge di Newton (azione-reazione) $|\vec{F}_{ep}| = -|\vec{F}_{pe}|$ e quindi, la forza che l'elettrone esercita sul protone è uguale a quella che il protone esercita sull'elettrone ed è uguale a $\vec{F}_{ep} = k \frac{q_e q_p}{r^2} \hat{r} = 8.2 \times 10^{-8} \hat{r} \text{ N}$

b) Il potenziale creato per il protone è $V(r) = k \frac{q_p}{r}$ e l'energia potenziale

$$U(r) = q_e V(r) = k \frac{q_e q_p}{r} = -4.3 \times 10^{-18} \text{ J} .$$

Per calcolare l'energia cinetica ci serve prima trovare la velocità dell'elettrone. Per farlo usiamo la seconda legge di Newton e le formule per il moto circolare uniforme (in

particolare $a = v^2/r$) Uguagliando $|\vec{F}| = k \frac{e^2}{r^2}$ e $|\vec{F}| = m_e a = m_e \frac{v_e^2}{r}$ troviamo

$$v_e = \sqrt{\frac{k}{m_e} \frac{e^2}{r}} = 2.2 \times 10^6 \text{ m/s} \text{ e l'energia cinetica } K = \frac{1}{2} m_e v_e^2 = 2.2 \times 10^{-18} \text{ J} . \text{ (Nota,}$$

questo modello non quantistico dà come energia di legame dell'elettrone al protone $K+U = -13.6 \text{ eV}$, una quantità molto vicina a quella sperimentale).

In fine calcoliamo il periodo del moto circolare uniforme che segue l'elettrone, cioè

$$\text{quanto tempo ci mette a fare un giro completo } T = \frac{2\pi r}{v} = 1.5 \times 10^{-16} \text{ s}$$

- 6) Una spira circolare, costituita da filo di rame (resistività $1.72 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$) di diametro $d = 1 \text{ mm}$ e lunghezza $L = 50 \text{ cm}$, è mantenuta in un piano perpendicolare ad un campo magnetico uniforme che aumenta in modo costante di 10 mT/s . Calcolare **a**) la f.e.m. indotta nella spira, e **b**) la potenza dissipata dal filo di rame.

a) Il campo magnetico aumenta con il tempo, $B = B_0 + ct$ dove $c = 10 \text{ mT/s}$, e questo farà che ci sia una f.e.m. indotta da B:

$$\varepsilon = \frac{-d\Phi}{dt} = \frac{-d}{dt} \left(\iint \vec{B} d\vec{A} \right) = \frac{-d}{dt} (B A_{\text{spira}}) = \frac{-d}{dt} \left[B \pi \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \right] = -c \pi \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 = -2 \times 10^{-4} \text{ V}$$

dove abbiamo usato $L = 2\pi R$ (R è il raggio della spira).

b) La potenza dissipata si può calcolare come $P = \frac{V^2}{R}$. Per farlo solo ci manca conoscere la resistenza. La relazione tra resistenza e resistività

$$R = \rho \frac{L}{A_{\text{filo spira}}} = 4\rho \frac{L}{\pi d^2} = 0.011 \Omega \text{ e quindi } P = \frac{\varepsilon^2}{R} = 3.6 \mu \text{ W}$$