MATEMATICA DEL CONTINUO

MODULO 1 – Matematica di Base – Aspetti Pratici

UNITÀ 1 – Rette e Parabole

In questa unità richiamiamo alcuni concetti fondamentali di geometria analitica, concetti che saranno utilizzati nel seguito del corso.

Lezione 1 – Le rette

L'equazione generale di una retta nel piano cartesiano è

$$ax + by + c = 0$$

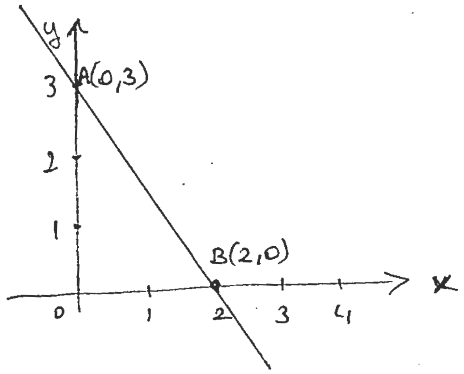
dove i numeri a e b (coefficienti di x e y) non possono essere contemporaneamente nulli. Per disegnare la retta è sufficiente trovare due punti cioè due soluzioni dell'equazione.

Esempio. Rappresentare graficamente la seguente retta: $\boxed{3x+2y-6=0}$

Ponendo successivamente, per esempio, $x=0$ si trova $y=3$ e

$y=0$ si trova $x=2$.

Dunque la retta passa per i punti $(0,3)$ e $(2,0)$. Il grafico è il seguente.



Retta $3x+2y-6=0$

Se $b \neq 0$ l'equazione si può trasformare nella forma $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$,

che di solito si scrive

$$\boxed{y = mx + q.}$$

Il numero m si chiama coefficente angolare o pendenza della retta, il numero q si chiama ordinata all'origine. Per esempio la retta della figura si può scrivere nella forma

$$y = -\frac{3}{2}x + 3 \quad \text{con } m = -3/2 \text{ e } q = 3.$$

Si può osservare che

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad A(x_1, y_1) \wedge B(x_2, y_2)$$

È evidente che se $m>0$ la retta è "in salita", se $m<0$ "in discesa", se $m=0$ è orizzontale. Se si ha una qualunque grandezza, g, variabile, la differenza tra due valori della grandezza si indica con Δg. Se Δg è positiva si parla di incremento, se Δg è negativa si parla di decremento.

Lezione 2 – Equazioni e Disequazioni di I° grado

Equazioni di primo grado:

La più generale equazione lineare (cioè di primo grado) in un'incognita è del tipo

$$ax = b \quad , a \neq 0$$

e la soluzione unica $\boxed{x = \frac{b}{a}}$

Esistono 3 casi delle soluzioni di un'equazione, e precisamente:

- $a \neq 0$: l'equazione ha, solo la soluzione b/a ;
- $a = 0 \wedge b \neq 0$: l'equazione non ha alcuna soluzione ;
- $a = 0 \wedge b = 0$: l'equazione ammette infinite soluzioni (tutti i numeri reali)

Esempio. $2x - 3 = 0 \quad 2x = 3 \quad x = 3/2$

La più generale equazione lineare in due incognite è del tipo:

$$ax + by = c \quad , (a,b) \neq (0,0)$$

Un'equazione come questa ha sempre infinite soluzioni.

Per esempio l'equazione $2x + 3y = 1$

	ponendo	da cui	le coppie
ha come soluzioni	$x = 0$	$\Rightarrow y = 1/3$	$(0, 1/3)$
	$y = 0$	$\Rightarrow x = 1/2$	$(1/2, 0)$
	$y = 1$	$\Rightarrow x = -1$	$(-1, 1)$, ecc.

Disequazioni di primo grado:

Una disequazione di primo grado in un'incognita si può sempre ridurre a una delle forme

$$ax + b > 0 \; , \; ax + b \geq 0 \; , \; ax + b < 0 \; , \; ax + b \leq 0$$

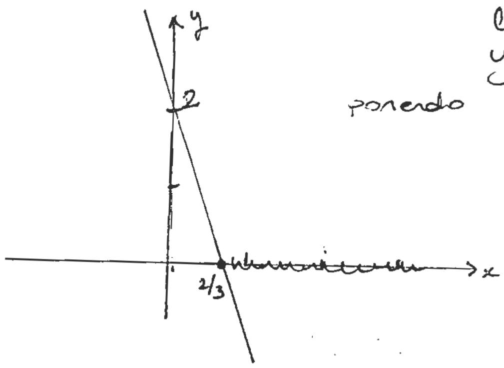
Conviene sempre ridursi al caso in cui $a > 0$, eventualmente cambiando il segno ad ambo i membri, dopodiché si procede portando b a secondo membro e dividendo per a.

Esempi. 1) $-3x + 2 \leq 0$

$-3x \leq -2$

$\boxed{x \geq 2/3}$

Si rappresenta graficamente come nella figura seguente:



la retta:
$y = -3x + 2$

ponendo $x = 0 \overset{\text{da cui}}{\Rightarrow} y = 2 \quad (0,2)$

$y = 0 \Rightarrow x = 2/3 \quad (2/3, 0)$

La disequazione $-3x + 2 \leq 0$

Attenzione: cambiando il segno è obbligatorio cambiare anche il verso della disequazione

2) $2x+9 > 7x-1$

$-5x > -10$

$x < 2$

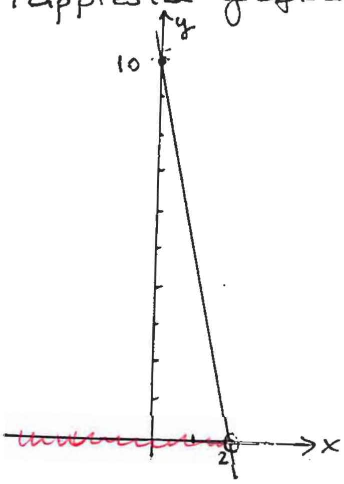
la retta:

$y = -5x+10$

ponendo $x=0 \overset{\text{da cui}}{\Rightarrow} y=10 \quad (0,10)$

$y=0 \Rightarrow x=2 \quad (2,0)$

Si rappresenta graficamente come nella figura seguente:



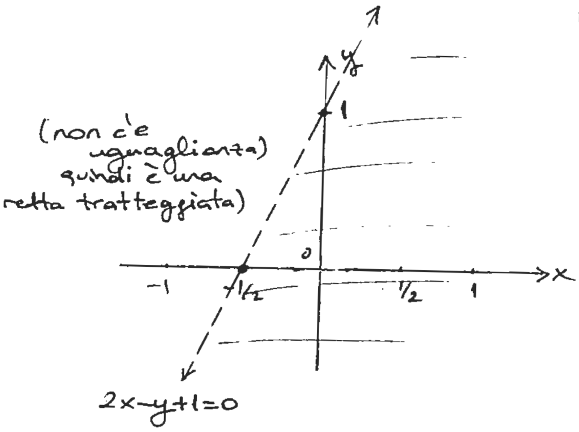
Un esempio per una disequazione di primo grado in due cognite:

$2x-y+1 > 0$

Si rappresenta graficamente la retta $2x-y+1=0$,

ponendo $x=0 \overset{\text{da cui}}{\Rightarrow} y=1 \quad (0,1)$

$y=0 \Rightarrow x=-1/2 \quad (-1/2, 0)$



Si prende poi il punto (0,0), che non sta sulla retta: sostituendo le sue coordinate nella disequazione si vede subito che esse la soddisfano, dunque la disequazione è verificata da tutti i punti che stanno nello stesso semipiano di O.

Lezione 3 – Le parabole (nel piano cartesiano)

Parabola con asse verticale:

Una parabola con asse verticale ha equazione

$$y = ax^2 + bx + c \quad , \quad a \neq 0$$

ed ha le seguenti caratteristiche fondamentali:

- Se $a > 0$ volge la concavità verso l'alto; se $a < 0$ volge la concavità verso il basso.

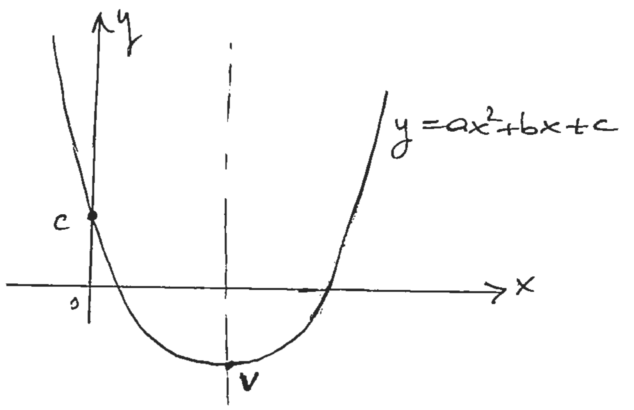
- Il vertice V ha ascissa $x_V = -\frac{b}{2a}$

- L'ordinata del vertice si può trovare direttamente sostituendo l'ascissa nell'equazione della parabola, cioè $y_V = y\left(-\frac{b}{2a}\right)$

$$y\left(-\frac{b}{2a}\right) = \cancel{a} \cdot \frac{b^2}{4a^{\cancel{2}}} + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Quindi possiamo riscrivere le coordinate del vertice:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \quad \text{dove } \Delta = b^2 - 4ac$$



Parabola con asse orizzontale:

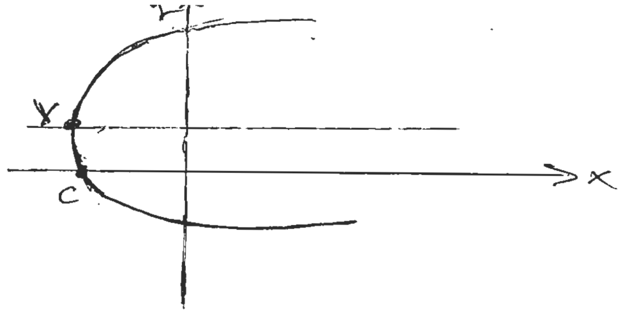
Una parabola con asse orizzontale ha equazione

$$x = ay^2 + by + c \quad , \quad a \neq 0$$

ed ha le seguenti caratteristiche fondamentali:

- Se $a > 0$ volge la concavità verso destra; se $a < 0$ volge la concavità verso sinistra.

- L'ordinata e l'ascissa del vertice: $V\left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$ dove $\Delta = b^2 - 4c$



$x = ay^2 + by + c$

Per tracciare correttamente una parabola occorre valutare il segno di "a", determinare il vertice e succesivamente almeno qualche altro punto, preferibilmente le intersezioni con gli assi (se ci sono).

Esempio: $y = 2x^2 - x - 1$

La concavità è verso l'alto $(a = 2 > 0)$, l'ascissa del vertice $x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}$

l'ordinata del vertice $y_V = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(1+8)}{8} = -9/8$

L'intersezione con l'asse delle y si ottiene ponendo $x = 0$, da cui $y = -1$

Il punto $(0, -1)$

Le intersezioni con l'asse delle x si ottengono ponendo $y = 0$, da cui

$2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow (2x+1)(x-1) = 0$

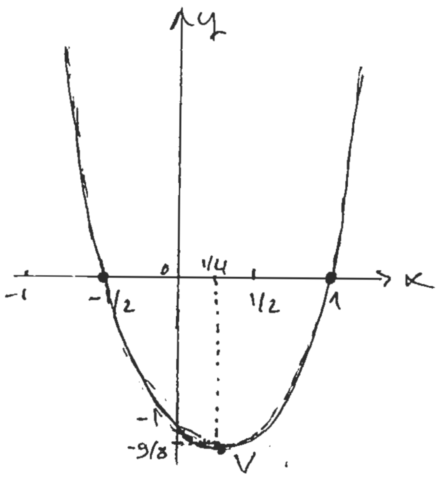
$\begin{matrix} 2x & 1 \\ x & -1 \end{matrix}$

$2x + 1 = 0$ $\quad$ $x - 1 = 0$

$x_1 = -1/2$ $\quad$ $x_2 = 1$

si trovano due punti $(-1/2, 0)$, $(1, 0)$

A questo punto il tracciamento del grafico è facile e si ottiene:



$V(1/4, -9/8)$

Parabola di equazione $y = 2x^2 - x - 1$

Lezione 4 – Equazioni e Disequazioni di II° grado

La più generale equazione di secondo grado (in un'incognita) è del tipo:

$$ax^2+bx+c=0 \quad , \quad a\neq 0$$

Per risolvere questa equazione si può ricorrere alla nota formula

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad ,$$

che fornisce

- 2 soluzioni distinte se la quantità $\Delta=b^2-4ac>0$ (è maggiore di zero);
- Una sola soluzione doppia se $\Delta=0$;
- Nessuna soluzione nell'insieme dei numeri reali se $\Delta<0$.

Esempi. 1) $2x^2-3x-5=0$

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4.2.(-5)}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{49}}{4}=\begin{cases}5/2\\-1\end{cases} \qquad (\Delta>0)$$

2) $x^2-6x+9=0$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-4.1.9}}{2}=3 \qquad (\Delta=0)$$

quando moltiplichi e dopo sommi

altrimenti $x^2-6x+9=0$

$x \quad -3$

$x \quad -3$

$(x-3)(x-3)=0$

$x_{1,2}=3$ (una soluzione doppia)

3) $x^2-2x+2=0$

$\Delta=(-2)^2-4.1.2=-4<0$ (dunque) nessuna soluzione reale

Una disequazione di secondo grado (in un'incognita) è una delle forme:

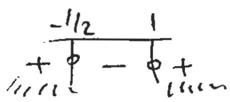
$$ax^2+bx+c>0 \ , \ ax^2+bx+c\geq 0 \ , \ ax^2+bx+c<0 \ , \ ax^2+bx+c\leq 0$$

Il modo migliore per risolverla è quello di considerare la parabola $y=ax^2+bx+c$ e poi valutare dal grafico quali sono le x che corrispondono alle parti di parabola che stanno sopra o sotto l'asse delle ascisse, a seconda del verso della disequazione. Gli esempi che seguono chiariranno il metodo.

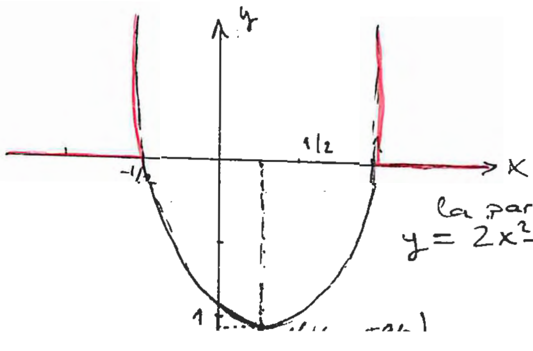
Esempio: $2x^2-x-1\geq 0$

$2x^2-x-1=0$

$x_1=-1/2 \quad x_2=1$



Le soluzioni sono $x\leq -1/2$ oppure $x\geq 1$



la parabola $y=2x^2-x-1$

$x\in(-\infty,-\frac{1}{2}]\cup[1,\infty)$

UNITÀ 2 – Le funzioni potenza

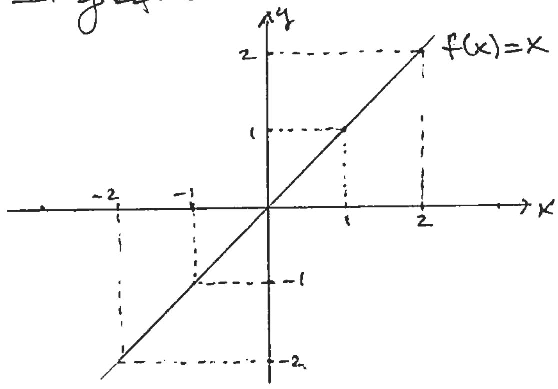
Lezione 1

Si chiamano funzioni potenza le funzioni del tipo

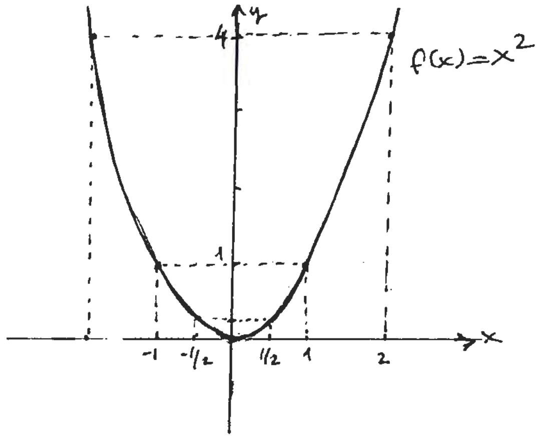
$$y = f(x) = x^n ,$$

essendo "n" un numero reale qualunque. ($n \in \mathbb{R}$) Se n è un intero positivo allora il dominio di queste funzioni è tutto $\mathbb{R}$; se n è un intero negativo, il dominio è costituito dai reali diversi da zero; negli altri casi il dominio è costituito dai reali positivi.

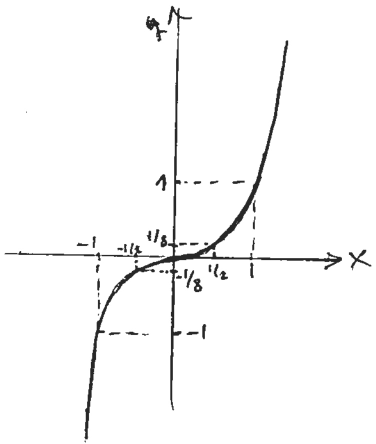
Il grafico nel caso $n=1$:



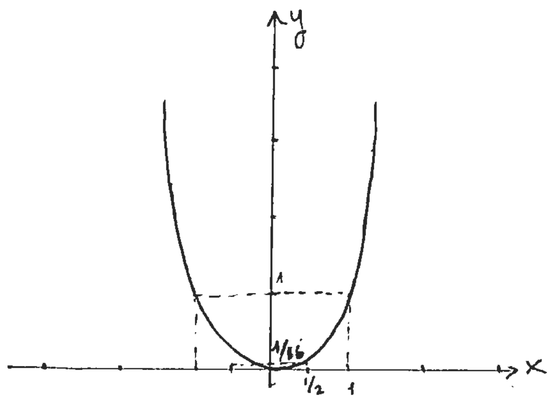
Nel caso $n=2$, $f(x)=x^2$
Una parabola con vertice nell'origine e concavità verso l'alto :



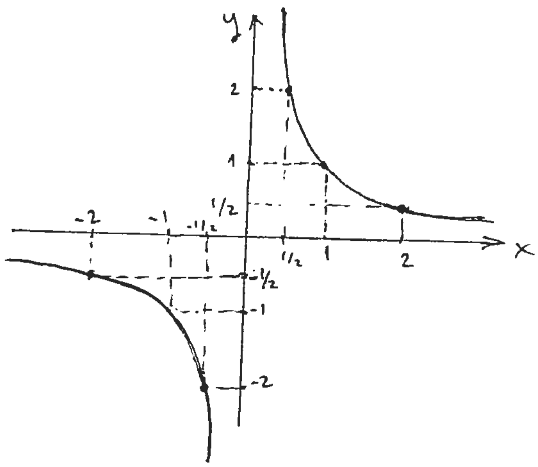
La funzione $f(x)=x^3$



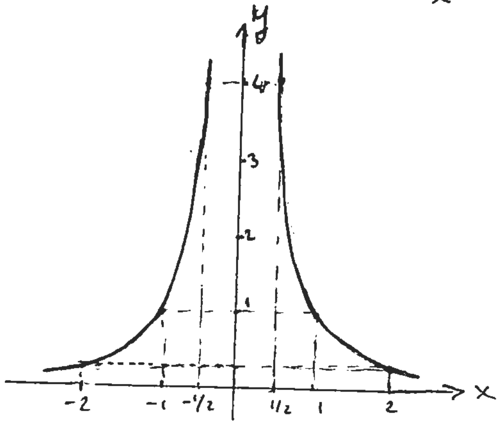
La funzione $f(x)=x^4$



La funzione $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$



La funzione $f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$



Una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice

PARI: Se $f(-x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

In questo caso, il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'asse y.

DISPARI: Se $f(-x) = -f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

In questo caso, il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'origine O.

Esempi. $f(x) = x^2$, $f(x) = x^{2n}$, $f(x) = |x|$ funzioni pari

$f(x) = x$, $f(x) = x^{2n+1}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ funzioni dispari

Lezione 2 – Le funzioni del tipo $f(x) = x^{1/n}$

$f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, si chiama radice n-sima, è definita $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se "n" è dispari. Se invece "n" è pari $\sqrt[n]{x}$ è definita $[0,\infty) \to [0,\infty)$, quindi $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$, dove n è pari, è definita per $g(x) \geq 0$

Esercizio: Determinare il campo di esistenza della funzione

1) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{-x}$

$x - 2 \geq 0$ e $-x \geq 0$, cioè $x \geq 2$ e $x \leq 0$

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-4}$

$x^2 - 4 \neq 0$
$x^2 \neq 4$
$x \neq \pm 2$

$9 - x^2 \geq 0$
$(3-x)(3+x) \geq 0$
$x = 3$ $\quad x = -3$

$-3 \quad 3$
$- \quad + \quad -$
$-3 \leq x \leq 3$

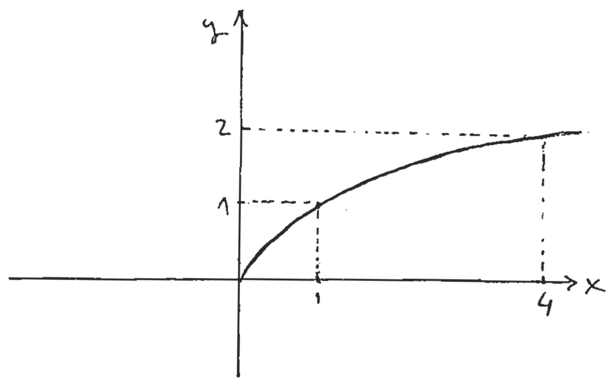
C.E: $[-3,3] - \{-2,2\}$

3) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2-1}{x+3}}$

$x + 3 \neq 0$
$x \neq -3$

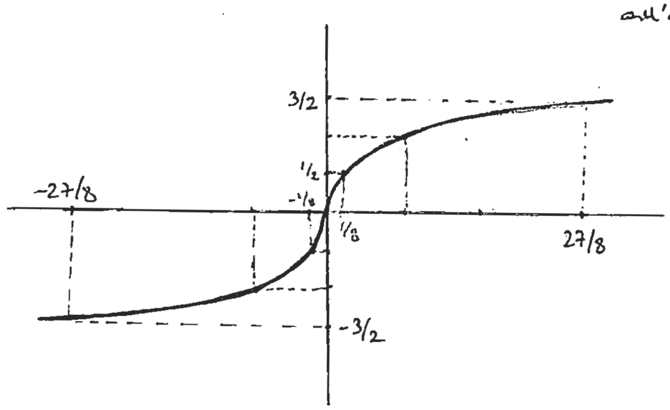
C.E: $\mathbb{R} - \{-3\}$

Il grafico della funzione $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$



$D: \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (funz. dispari) simmetrico rispetto all'origine



$D: \mathbb{R}$

Lezione 3 – Le funzioni del tipo $f(x)=x^{m/n}$ (con esponente razionale)

$f(x)=x^{m/n}=\sqrt[n]{x^m}$, $m\in\mathbb{Z}$ e $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ ha per dominio:

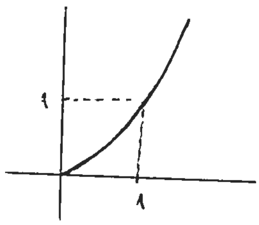
Si ha
$$\begin{cases} |m| \text{ pari} \Rightarrow x\in\mathbb{R} \\ |m| \text{ dispari e } n \text{ dispari} \Rightarrow x\in\mathbb{R} \\ |m| \text{ dispari e } n \text{ pari} \Rightarrow x\in\mathbb{R}^+ \end{cases}$$

cioè per $f(x)=x^{m/n}$, $n\neq 0$ se $m=2k$, $k\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}$

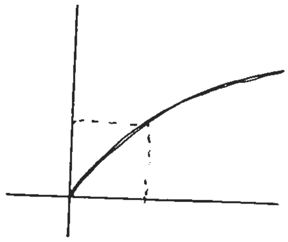
se $m=2k+1$, $k\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ se $n=2t$, $t\in\mathbb{Z}^+$ $\Rightarrow x\in\mathbb{R}^+$

se $n=2t+1$, $t\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow x\in\mathbb{R}$

Il grafico se $m/n>1$

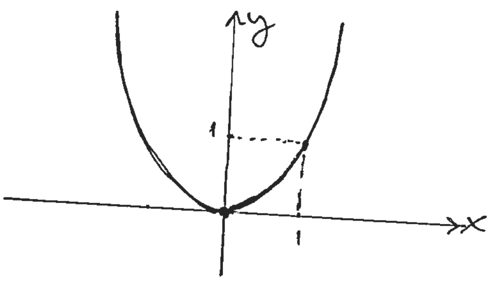


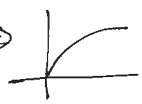
se $0<m/n<1$

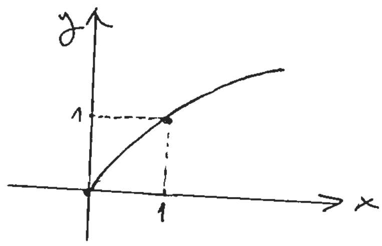


Esempio 1) $f(x)=x^{6/5}=\sqrt[5]{x^6}$ funz. pari $\Rightarrow$ simmetrico rispetto all'asse y, $x\in\mathbb{R}$

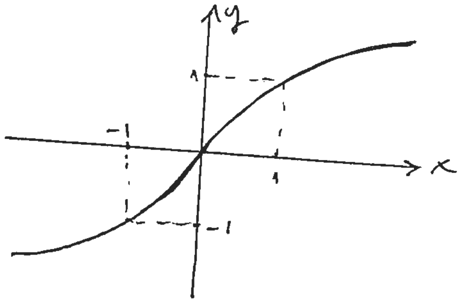
$m=6/5>1 \Rightarrow$  ↑



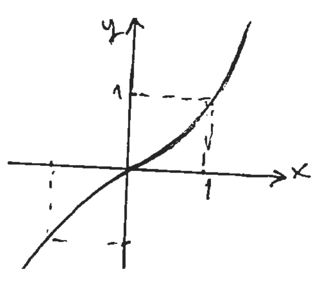
2) $f(x)=x^{5/6}=\sqrt[6]{x^5}$ C.E: $x\geq 0$ $m=5/6<1 \Rightarrow$  ↓



3) $f(x)=x^{3/5}=\sqrt[5]{x^3}$ C.E.: $\forall x\in\mathbb{R}$, $m=3/5<1 \Rightarrow$ ↓

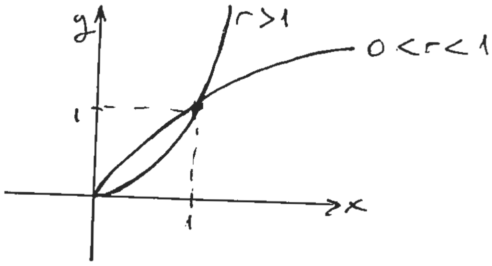


4) $f(x)=x^{5/3}=\sqrt[3]{x^5}$ C.E: $\forall x\in\mathbb{R}$, $m=5/3>1$ ↑



Lezione 4 – Le funzioni del tipo $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}$

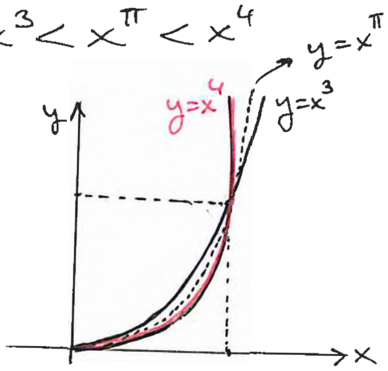
$f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}$ è definita per $x \geq 0$.



Esempi 1) $f(x) = x^{\pi}$, C.E: $x \geq 0$

Sapiamo che $3 < \pi < 4$

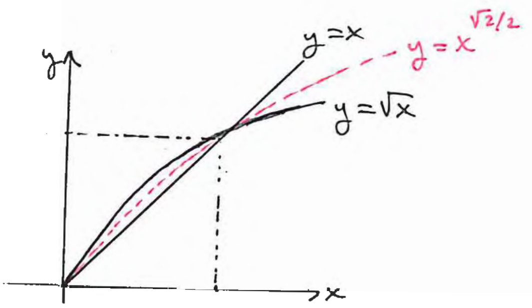
Quindi $x^3 < x^{\pi} < x^4$



2) $f(x) = x^{\sqrt{2}/2}$, C.E: $x \geq 0$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \sim 0.7$

$x^{1/2} < x^{0.7} < x^1$



UNITÀ 3 – Disequazioni Razionali

Lezione 1 _ Polinomi

Def: I polinomi sono espressioni matematiche definite mediante somme e differenze di termini costituiti da una parte numerica, detta coefficiente, e da una parte letterale

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad , \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \, , \, n \in \mathbb{N}$$

– Raccoglimento a fattor comune

$$ax+ay+bx+by = a(x+y)+b(x+y) = (x+y)(a+b)$$

– Prodotto di una somma per una differenza

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

– Quadrato di un binomio

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

– Cubo di un binomio

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

– Somma o differenza di due cubi

$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Esercizi 1) $x^3+3x^2-x-3 > 0$ C.E: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$x^2(x+3)-(x+3) > 0$$

$$(x+3)(x^2-1) > 0$$

$x+3=0$ $\quad x=-3$ $\qquad x^2-1=0$ $\quad x=\pm 1$

		-3		-1		1	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x^2-1	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$

soluzione (>0)

$\Rightarrow x \in (-3,-1) \cup (1,\infty)$

2) $(x^2-4)(x^2+5x+4) \le 0$ C.E: $\forall x \in \mathbb{R}$

$x^2-4=0$ $\quad x=\pm 2$

$x^2+5x+4=0$

$(x+4)(x+1)=0$

$\Downarrow \quad \Downarrow$

$x=-4 \quad x=-1$

		-4		-2		-1		2	
x^2-4	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$(x+4)(x+1)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$

Soluzione (≤ 0)

$\Rightarrow x \in [-4,-2] \cup [-1,2]$

3) $x^4 - 4x^2 - 5 < 0 \qquad C.E: \forall x \in \mathbb{R}$

$x^2 \qquad -5$

$x^2 \qquad 1$

$(x^2-5)\cancel{(x^2+1)} < 0$

$x^2 - 5 = 0$

$x = \pm\sqrt{5}$

	$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$	
$+$	0	$-$	0	$+$

$-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$

Lezione 2_ Razionali fratte

Una funzione del tipo $\frac{f(x)}{g(x)}$ è definita per $g(x) \neq 0$.

Esercizi: 1) $\frac{x-3}{x^2-4} \geq 0$

$x^2 - 4 \neq 0$

$x \neq \pm 2$

$C.E: \forall x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 2$

cioè $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$

$\frac{x-3}{(x-2)(x+2)} \geq 0$

$x - 3 = 0$

$x = 3$

		-2		2		3	
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$

$x \in (-2, 2) \cup [3, \infty)$

2) $\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2} > 0$

$x^2 - 3x + 2 \neq 0$

$(x-2)(x-1) \neq 0$

$x \neq 2,\ x \neq 1.$

$C.E: \forall x \in \mathbb{R} : x \neq {}^{1}_{2}$

cancellazione è possibile

$\rightarrow x \neq 2$

$\frac{\cancel{(x-2)}(x+3)}{\cancel{(x-2)}(x-1)} > 0$

$x + 3 = 0$

$x = -3$

		-3		1		2	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$

$x < -3 \qquad 1 < x < 2 \qquad x > 2$

$x \in (-\infty, -3) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$

UNITÀ 4 – Disequazioni irrazionali

→ Una disequazione si dice irrazionale se l'incognita compare come argomento di una radice.

tipo: $\sqrt[n]{f(x)} \leq g(x)$

$\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$

$\sqrt[n]{f(x)} \geq g(x)$

$\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono espressioni qualsiasi contenenti x, e "n" è l'indice della radice. Dobbiamo distinguere due casi:

Lezione 1 – Dis. irrazionali con radice ad indice dispari

La radice di indice dispari <u>non</u> ha condizioni di esistenza, cioè esiste per qualunque numero reale. Per risolvere una dis. irrazionale con radici di indice dispari è sufficiente elevare a tale indice entrambi i membri della disuguaglianza

Per intenderci:

$\sqrt[n]{f(x)} \gtrless g(x)$, con n dispari

$\iff f(x) \gtrless [g(x)]^n$ → Eserci

Esercizio 1) $\sqrt[3]{x^3-x} < x+1$ $\qquad$ C.E : $\forall x \in \mathbb{R}$

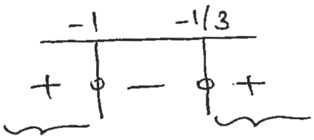
$x^3-x < (x+1)^3$

$\cancel{x^3}-x < \cancel{x^3}+3x^2+3x+1$

$3x^2+4x+1 > 0$

$(3x+1)(x+1)=0$

$x=-1/3 \qquad x=-1$



$x \in (-\infty,-1) \cup (-\frac{1}{3},\infty)$

2) $\sqrt[3]{1-3x} \geq 1-x$ $\qquad$ C.E : $\forall x \in \mathbb{R}$

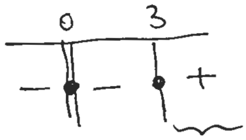
$1-3x \geq (1-x)^3$

$\cancel{1}-\cancel{3x} \geq \cancel{1}-\cancel{3x}+3x^2-x^3$

$x^3-3x^2 \geq 0$

$x^2(x-3) \geq 0$

$x=0$ doppia $\qquad x=3$



$\Rightarrow x \geq 3$ e $x=0$

Notare che x^2 è sempre positivo, quindi $x \geq 3$ per ottenere $x^2(x-3) \geq 0$

Lezione 2 – Dis. irrazionali con radice ad indice pari

(i) Verso maggiore : $>$

Se n è pari, risolvere la disequazione $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$ equivale a risolvere i due sistemi per poi considerare l'unione delle loro soluzioni.

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} (f(x) \geq 0)\,* \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^n \end{cases}$$

(in questo caso, $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$ è automaticamente verificata)

dove $f(x) \geq 0$ è la condizione di esistenza della radice di indice pari

* Osserviamo che la condizione $f(x) > [g(x)]^n$ implica che $f(x)$ sia maggiore di una potenza pari, ovviamente non negativa per definizione, quindi $f(x) \geq 0$ è implicitamente soddisfatta dall'ultima e può essere tralasciata.

(ii) Verso maggiore o uguale : $\geq$

$$\sqrt[n]{f(x)} \geq g(x), \text{ con } n \text{ pari} \iff \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq [g(x)]^n \end{cases}$$

(iii) $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$, con n pari

In questo caso è sufficiente risolvere il sistema

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^n \end{cases}$$

(iv) $\sqrt[n]{f(x)} \leq g(x)$, con n pari $\iff \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq [g(x)]^n \end{cases}$

Esercizi : 1) $\sqrt{x^2+4} < x-2$

$\boxed{C.E : \forall x \in \mathbb{R}}$ perchè x^2+4 é già sempre positivo $(\Delta < 0)$

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = x-2 > 0 \\ \qquad x > 2 \\ \\ x^2+4 < (x-2)^2 \\ \cancel{x^2}+\cancel{4} < \cancel{x^2}-4x+\cancel{4} \\ \quad 4x < 0 \\ \quad\; x < 0 \quad \Rightarrow NO \\ \text{Nessun soluzione} \end{array}\right\} \text{Ness. soluzione}$$

2) $\sqrt{2x+1} \geq x-1$

Soluzione :

$\left[-\frac{1}{2}, 1\right) \cup [1,4]$

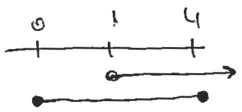
$= \left[-\frac{1}{2}, 4\right]$

$2x+1 \geq 0$

$x \geq -1/2$ (C.E)

$$1^\circ \quad \left.\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \quad \rightarrow \quad x-1<0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad\; x<1 \end{array}\right\} \left[-\tfrac{1}{2}, 1\right)$$

$$2^\circ \quad \left.\begin{array}{l} g(x) \geq 0 \quad \rightarrow \quad x-1 \geq 0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad\; x \geq 1 \\ f(x) \geq [g(x)]^2 \\ 2x+\cancel{1} \geq x^2-2x+\cancel{1} \\ x^2-4x \leq 0 \\ x(x-4) \leq 0 \\ \swarrow \quad\; \downarrow \\ 0 \qquad 4 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{array}\right\} x \in [1,4]$$



3) $\underbrace{\sqrt{x^2+x+1}}_{\Delta<0} \geq x+1$

1° $\left.\begin{array}{ll} f(x)\geq 0 & C.E: \forall x\in\mathbb{R} \\ g(x)<0 \rightarrow & x+1<0 \\ & x<-1 \end{array}\right\} (-\infty,-1)$

Soluzione: $(-\infty,-1)\cup[-1,0]$

$x\in(-\infty,0]$

2° $\left.\begin{array}{ll} g(x)\geq 0 \longrightarrow & x+1\geq 0 \\ f(x)\geq [g(x)]^2 & x\geq -1 \\ \downarrow & \\ \cancel{x^2}+x+\cancel{1}\geq \cancel{x^2}+2x+\cancel{1} & \\ x\leq 0 & \end{array}\right\} [-1,0]$

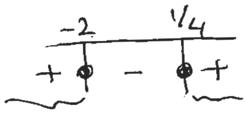
4) $\sqrt{4x^2+7x-2} < 2x$

$4x^2+7x-2\geq 0$

$4x \quad -1$

$x \quad 2$

$(4x-1)(x+2)\geq 0$ $\nearrow x_1=1/4$, $\searrow x_2=-2$



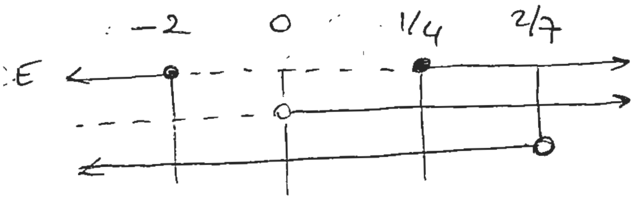
$C.E: (-\infty,-2]\cup[1/4,\infty)$

$\left\{\begin{array}{ll} f(x)\geq 0 & \\ g(x)>0 \longrightarrow & 2x>0 \\ & x>0 \\ f(x)<[g(x)]^2 & \end{array}\right.$

$\downarrow$

$4\cancel{x^2}+7x-2<4\cancel{x^2}$

$x<2/7$



Soluzione: $x\in[1/4, 2/7)$

Esercizi * Rappresentare graficamente le parabole;

(a) $y = x^2 - 2x - 8$

(b) $y = -2x^2 + 9x - 9$

e determinare le coordinate dei vertici $V(x, y)$.

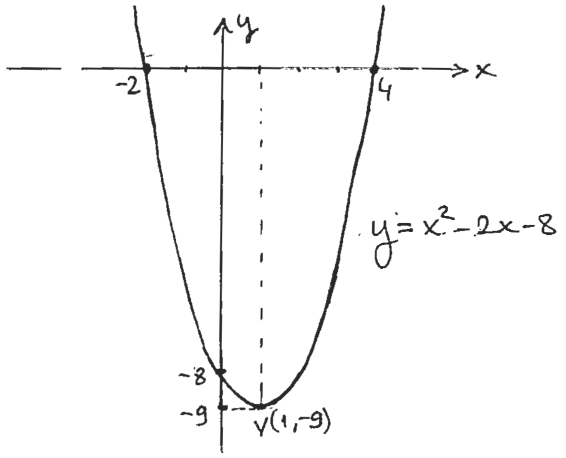
(a) $x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-2)}{2} = 1$, ponendo $x_V = 1 \Rightarrow y_V = 1^2 - 2.1 - 8 = -9$

Da cui, $V(1, -9)$

$x = 0 \Rightarrow y = -8 \quad (0, -8)$

$y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \quad (x-4)(x+2) = 0 \quad (4, 0) \wedge (-2, 0)$

$\begin{matrix} x & -4 \\ x & 2 \end{matrix} \qquad x_1 = 4 \quad x_2 = -2$



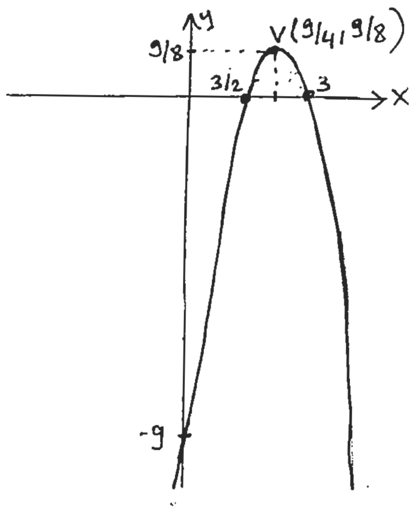
(b) $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{9}{-4} = 9/4$, $y_V = -2\left(\frac{9}{4}\right)^2 + 9\left(\frac{9}{4}\right) - 9 = 9/8$

Da cui $V = (9/4, 9/8)$

$x = 0 \Rightarrow y = -9 \quad (0, -9)$

$y = 0 \Rightarrow -2x^2 + 9x - 9 = 0 \Rightarrow (2x-3)(3-x) = 0 \quad (3/2, 0) \wedge (3, 0)$

$\begin{matrix} 2x & -3 \\ -x & 3 \end{matrix} \qquad x_1 = 3/2 \quad x_2 = 3$



* Risolvere per via grafica

$$x^4 \geq 3 - 2x^2$$

Campo di esistenza : C.E : $\mathbb{R}$

$$x^4 + 2x^2 - 3 = 0$$

$f(x) = x^4$, $f(x) = 3-2$

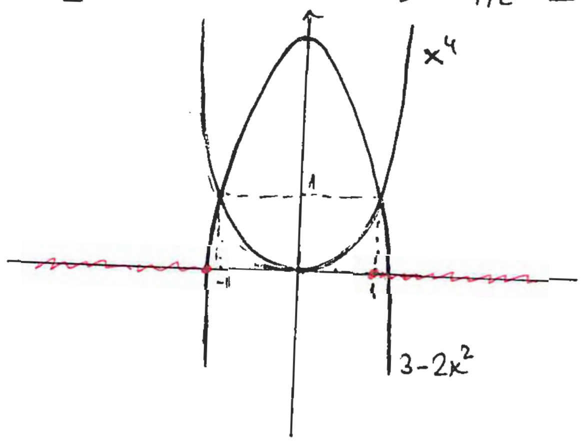
$(0,0)$	$(0,3)$
$(1,1)$	$(1,1)$
$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right)$	$(-1,1)$

$x^2 = t \Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow (t+3)(t-1) = 0$

$t_1 = -3$, $t_2 = 1$

Per $t_1 = -3 \Rightarrow x^2 \neq -3$ non soddisfa

Per $t_2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$



$x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

* Risolvere le disequazioni 1) $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$ (scomponendo in fattori

C.E : $\mathbb{R}$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x-2) - (x-2) = (x^2-1)(x-2)$$

Per il fattore

$x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

	-1		1	
$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$

Il fattore x^2-1 è positivo per $x < -1$ e pe $x > 1$, è negativo per $-1 < x < 1$, si annulla per $x = \pm 1$

Per il fattore

$x - 2 = 0$

$x = 2$

	2	
$-$	$\circ$	$+$

Il fattore $x-2$ è positivo per $x > 2$, negativo per $x < 2$, si annulla per $x = 2$.

Utilizzando la regola dei segni per $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$;

		-1		1		2	
x^2-1	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	$\circ$	$+$
$f(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$

Concludiamo che la disequazione è verificata per

$$x \in (-1, 1) \cup (2, \infty)$$

2) $\dfrac{x^2-1}{x-2} \geq 0$

La risoluzione di questa disequazione può utilizzare lo stesso grafico della precedente; l'unica differenza consiste nel fatto che il fattore $x-2$ ora sta al denominatore è quindi deve essere diverso da zero. (il valore $x=2$ deve andare escluso)

C.E : $\mathbb{R} - \{2\}$

Quindi il grafico di segno :

		-1		1		2	
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$

$x \in [-1, 1] \cup (2, \infty)$

3) $\sqrt{x^2-9x+14} > x-8$

La parte con radice è verificata per $x^2-9x+14 \geq 0$

$x^2-9x+14=0$, $(x-7)(x-2)=0$, $x_1=7$, $x_2=2$ $\left(x_{1,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81-4 \cdot 14}}{2} = \dfrac{9 \pm 5}{2} \begin{cases} 7 \\ 2 \end{cases} \right.$

$x \quad -7$
$x \quad -2$

		2		7	
	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \leq 2 \ \vee \ x \geq 7$ (C.E)

$\sqrt{f(x)} > g(x)$ è verificata quando

$f(x) \geq 0 \begin{cases} 1^\circ.\ g(x) < 0 \\ 2^\circ.\ g(x) \geq 0 \ \wedge \ \sqrt{f(x)} > g(x) \end{cases}$

$1^\circ.$ $x-8 < 0$
$x < 8$

$2^\circ.$ $x-8 \geq 0$
$x \geq 8$

$x^2-9x+14 > x^2-16x+64$
$7x > 50 \Rightarrow x > 50/7$

$\Rightarrow x \geq 8 \wedge x > 50/7 \Rightarrow x \geq 8$

Per trovare soluzione, si considera l'intersezione di $1^\circ \cup 2^\circ$ con C.E.

cioé $1^\circ \cup 2^\circ = \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \cap \big((-\infty, 2] \cup [7, \infty) \big) = (-\infty, 2] \cup [7, \infty)$

4) $\sqrt{4x^2-13x+3} < 2x-3$

$4x^2-13x+3 \geq 0$

$x_{1,2} = \dfrac{13 \pm \sqrt{169-4\cdot 4\cdot 3}}{8} = \dfrac{13 \pm 11}{8} = \begin{cases} 3 \\ 1/4 \end{cases}$

$\sqrt{f(x)} < g(x)$ è verificata quando
$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ 2x-3>0 \\ 4x^2-13x+3 < (2x-3)^2 \end{cases}$$

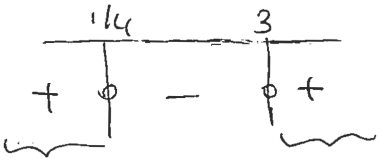
$4x^2-13x+3=0$

$x \quad -3$

$4x \quad -1$

$(x-3)(4x-1)=0$

$x=3 \qquad x=1/4$



$x \leq 1/4 \;\vee\; x \geq 3$ (C.E.)

$2x-3>0$

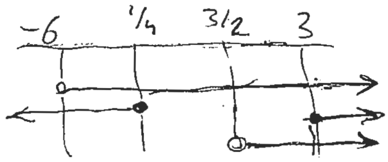
$\boxed{x > 3/2}$

$4x^2-13x+3 < 4x^2-12x+9$

$-6 < x$

Si ottiene come la soluzione della disequazione

$x \geq 3$



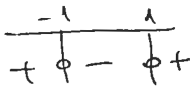
5) $\sqrt[3]{x^2+7} > 2$

$x^2+7 > 8$

$x^2-1>0$

$x^2-1=0$

$x=\pm 1$



$x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$

C.E: $\mathbb{R}$

6) $x(x+1) < x^3+1$ C.E: $\mathbb{R}$

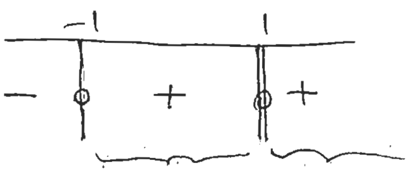
$(x^3+1) - x(x+1) > 0$

$(x+1)(x^2-x+1) - x(x+1) > 0$

$(x+1)(x^2-2x+1) > 0$

$(x+1)(x-1)^2 > 0$

- $x+1=0 \Rightarrow x=-1$
- $(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$ doppia



$x \in (-1,1) \cup (1,\infty)$

7) $\sqrt[5]{x^5-3x+1} > x$

C.E : $\mathbb{R}$

$x^5-3x+1 > x^5$

$3x<1$

$x<1/3$

8) $\sqrt[3]{x^3-3x^2+2x+1} < x-1$ C.E : $\mathbb{R}$

$\cancel{x^3}-\cancel{3x^2}+2x+1 < \cancel{x^3}-\cancel{3x^2}+3x-1$

$1+1<3x-2x$

$x>2$

9) $2x+3 > \sqrt{4x^2-3x-1}$ $\left(g(x) > \sqrt{f(x)}\right)$

$4x^2-3x-1 \geq 0$

$4x^2-3x-1=0 \Rightarrow (4x+1)(x-1)=0$

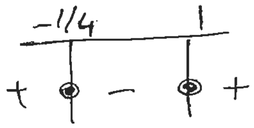
$4x \quad 1$

$x \quad -1$

$4x+1=0 \Rightarrow x_1=-1/4$

$x-1=0 \Rightarrow x_2=1$

$\left(x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot4(-1)}}{8}=\frac{3\pm5}{8}=\begin{cases}1\\-\frac{1}{4}\end{cases}\right.$



$x\in\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right]\cup\left[1,\infty\right)$ (C.E)

Per $f(x)\geq 0$
- 1° $g(x)\leq 0 \Rightarrow$ NO
- 2° $g(x)>0 \;\wedge\; g^2(x)>f(x)$

$\hookrightarrow 2x+3>0 \Rightarrow x>-3/2$

$(2x+3)^2 > 4x^2-3x-1$

$\cancel{4x^2}+12x+9 > \cancel{4x^2}-3x-1$

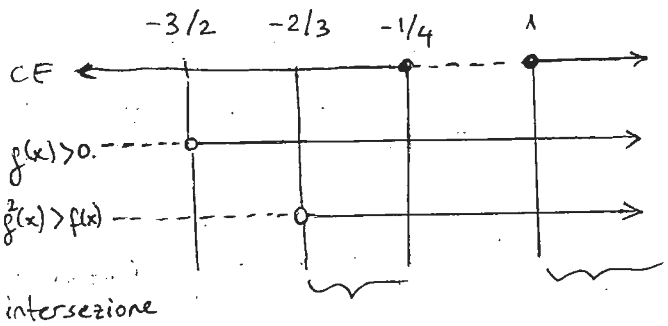
$15x>-10$

$x>-2/3$

Oppure ;

$2° \rightarrow x>-3/2 \;\wedge\; x>-2/3$

$\Rightarrow x>-2/3$



Usando C.E & 2°, abbiamo

$-2/3 < x \leq -1/4 \;\vee\; x\geq 1$

$-2/3 < x \leq -1/4 \;\vee\; x\geq 1$ $\left(x\in\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{4}\right]\cup\left[1,\infty\right)\right)$

10) $\sqrt{4x^2-1} \geq 2(x-1)$; $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$

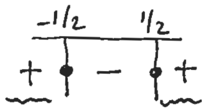
$4x^2-1 \geq 0$

C.E : $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1/2, \infty)$

$(2x-1)(2x+1)=0$

$2x-1=0 \Rightarrow x = 1/2$

$2x+1=0 \Rightarrow x = -1/2$



Per $f(x) \geq 0$ $\begin{cases} 1^\circ & g(x) < 0 \\ 2^\circ & g(x) \geq 0 \wedge f(x) \geq g^2(x) \end{cases}$

1° $2(x-1) < 0$

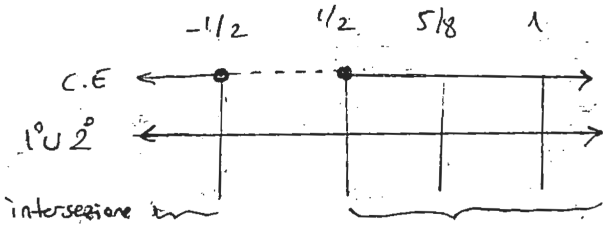
$x < 1$

2° $2(x-1) \geq 0$ $\wedge$ $4x^2-1 \geq 4(x^2-2x+1)$ $\Rightarrow x \geq 1$

$x \geq 1$ $\qquad \cancel{4x^2}-1 \geq \cancel{4x^2}-8x+4$

$8x \geq 5$

$x \geq 5/8$



$1^\circ \cup 2^\circ \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

$(1^\circ \cup 2^\circ) \cap C.E \Rightarrow x \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \infty)$

11) $\sqrt{x+1} > \sqrt[3]{2x-1}$; $\sqrt{f(x)} > \sqrt[3]{g(x)}$

C.E : $x+1 \geq 0$

$x \geq -1$

$f(x) \geq 0$ $\begin{cases} 1^\circ & g(x) < 0 \\ 2^\circ & g(x) \geq 0 \wedge \sqrt{f(x)} > \sqrt[3]{g(x)} \end{cases}$

1° $2x-1 < 0$

$x < 1/2$

2° $2x-1 \geq 0$ $\wedge$ $(\sqrt{x+1})^6 > (\sqrt[3]{2x-1})^6$ $\Rightarrow x \geq 1/2$

$x \geq 1/2$ $\qquad (x+1)^3 > (2x-1)^2$

$x^3+3x^2+3x+\cancel{1} > 4x^2-4x+\cancel{1}$

$x^3-x^2+7x > 0$

$x(x^2-x+7) > 0$

$\Downarrow$

$\boxed{x > 0}$ $\qquad \Delta = 1-28 < 0$

$(1^\circ \cup 2^\circ) \cap C.E$

$\Rightarrow x \in \mathbb{R} \cap x \in [-1, \infty)$

$\Rightarrow x \in [-1, \infty)$

UNITÀ 5 – Logaritmi ed Esponenziali

Lezione 1 – Definizione e Proprietà Dei Logaritmi

Def: Siano dati un numero reale $a>0$ e $a\neq 1$ e un numero reale $b>0$.
Si chiama logaritmo in base a di b, e si indica con

$$\log_a b$$

In formule la definizione si può sintetizzare come segue:

$$a^{\log_a b}=b \quad , \; b\in\mathbb{R}^+$$

Per esempio la x che risolve l'equazione $2^x=3$ è data dal $\log_2 3$, perché

$$2^{\log_2 3}=3$$

In matematica la più importante base dei logaritmi è il numero "e" e il logaritmo in base "e" si chiama <u>logaritmo naturale</u> e si indica "$\ln x$".
Invece quando scriviamo $\log x$ senza base lo intendiamo in base 10.

$$\log_e x=\ln x \quad , \; x\in\mathbb{R}^+$$

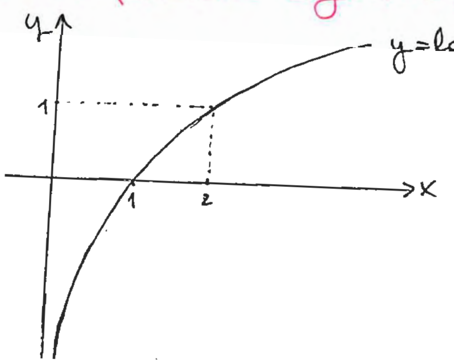
<u>Le proprietà dei logaritmi</u> (ricordando che $a>0$ e $a\neq 1$):

1) $\log_a a=1$
2) $\log_a 1=0$
3) $\log_a x_1=\log_a x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2 \; , \; \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}^+$
4) $\log_a x=y \Rightarrow x=a^y$
5) $\log_a(x_1\cdot x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2 \quad , \; x_1,x_2\in\mathbb{R}^+$
6) $\log_a(x_1/x_2)=\log_a x_1-\log_a x_2 \quad , \; x_1,x_2\in\mathbb{R}^+$
7) $\log_a x^n=n\log_a x \quad , \; x\in\mathbb{R}^+ \quad ; \quad \log_{a^m}x=\frac{1}{m}\log_a x \quad , \; x\in\mathbb{R}^+$
8) $a^{\log_a x}=x \quad , \; \forall x\in\mathbb{R}^+$

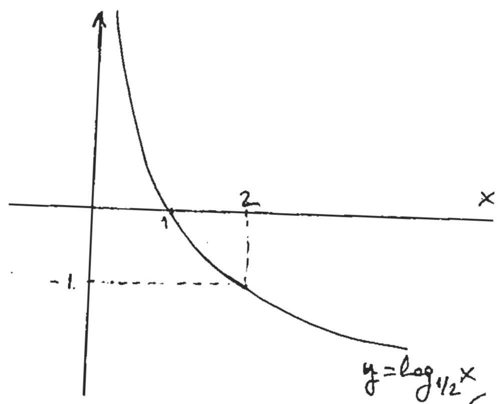
Da 1 & 7 otteniamo $\log_a a^x=x \; , \; \forall x\in\mathbb{R}$

I grafici della funzione logaritmo:

con una base $a>1$ esempio: $a=2$



con una base $0<a<1$ esempio: $a=1/2$

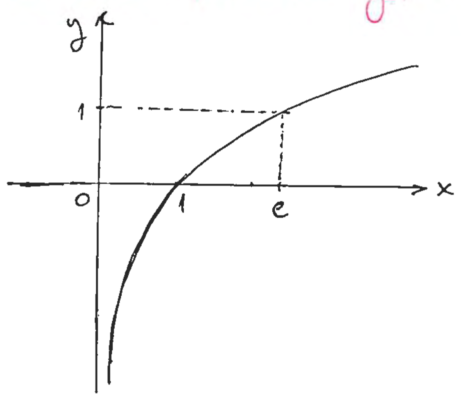


Formula di cambiamento di base:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad , \; b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

Per esempio: $\log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2}$

Il grafico della funzione $y = \ln x$



Lezione 2 – Equazioni e Disequazioni Logaritmiche

Esercizi: 1) $\log_{1/3} x = 2 \quad , \quad x > 0$

$x = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

2) $\log_2^2 x - 6\log_2 x + 8 = 0 \quad , \quad x > 0$

$t = \log_2 x \Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0$

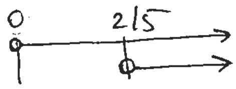
$(t-4)(t-2) = 0 \quad \begin{cases} t = 4 \\ t = 2 \end{cases}$

$\log_2 x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16$

$\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4$

3) $2\log_{2/3} x + \log_{2/3} 3 = \log_{2/3}(5x-2)$

1. $x > 0$
2. $5x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2/5$



$\Big\} \; x > 2/5 \quad$ (C.E)

$\log_{2/3} x^2 + \log_{2/3} 3 = \log_{2/3}(5x-2)$

$\log_{2/3} 3x^2 = \log_{2/3}(5x-2)$

Possiamo uguagliare gli argomenti dei due logaritmi

$3x^2 = 5x - 2 \Rightarrow 3x^2 - 5x + 2 = 0$

$(3x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 2/3 \; , \; x = 1$

(entrambe soluzioni soddisfano C.E $x > 2/5$)

quindi Soluzione: $x = 2/3$, $x = 1$

4) $\log_3(x+8) = 2 - \log_3(x)$

- $x > 0$
- $x+8 > 0 \Rightarrow x > -8$

$-8 \quad 0$

$\left.\right\}$ $x > 0$ C.E.

$\log_3(x+8) + \log_3(x) = 2$

$\log_3 x(x+8) = 2$

$\log_3(x^2+8x) = 2$

$x^2 + 8x = 3^2$

$x^2 + 8x - 9 = 0$

$(x+9)(x-1) = 0 \quad < \begin{matrix} x=-9 & \text{non é accettabile} \\ x=1 & \end{matrix} \Big\} \; x=1$

5) $\ln(x) - \ln(x+2) = \ln(3)$

- $x > 0$
- $x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$

$\Big\}$ $x > 0$ C.E.

$\ln\left(\frac{x}{x+2}\right) = \ln(3)$

$\frac{x}{x+2} = 3$

$3x + 6 = x$

$2x = -6 \Rightarrow x = -3$ NO $\rightarrow$ Nessun soluz.

6) $\log_2\left(\sqrt{x^3-2x^2+x}\right) = 1 + \log_2(x-1)$

1. $\log_2 f(x) \Rightarrow f(x) > 0$

$x^3 - 2x^2 + x > 0$

$x(x^2-2x+1) > 0$

$x(x-1)^2 > 0$

$x=0 \qquad x=1$ doppia

$0 \quad 1$

$- \quad + \quad +$

$0 < x < 1 \;\vee\; x > 1$

$\log_2\left(\sqrt{x^3-2x^2+x}\right) - \log_2(x-1) = 1$

$\log_2 \frac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{x-1} = 1$

$\frac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{x-1} = 2$

$\sqrt{x^3-2x^2+x} = 2(x-1)$

$x\cancel{(x-1)^2} = 4\cancel{(x-1)^2}$

$\boxed{x=4}$

2. $x - 1 > 0$

$x > 1$

$1 \wedge 2 \Rightarrow$ $\Big\}$ $x > 1$

7) $\log_{1/2} x > 4$ $\qquad x>0$

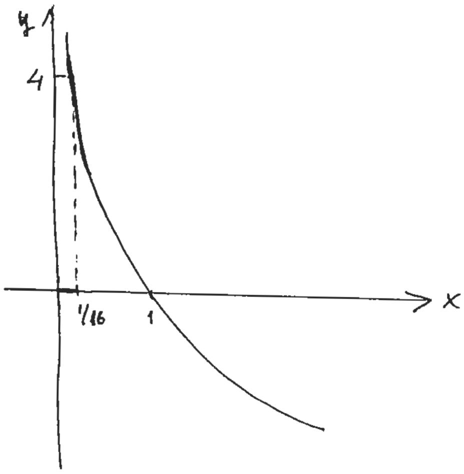
$0 < a = 1/2 < 1$

$\log_{1/2} x = 4$

$x = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

$x < 1/16$ perché $0 < a = 1/2 < 1$

quindi $0 < x < 1/16$



8) $\frac{\ln(x)-1}{\ln(x)-2} \leq 0$

C.E: $x>0$

$\ln(x) \neq 2$

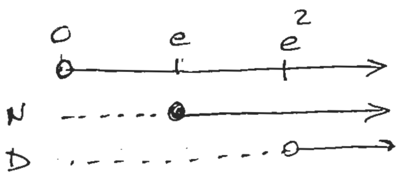
$x \neq e^2$

N: $\ln(x) - 1 \geq 0$

$x \geq e$

D: $\ln(x) - 2 > 0$

$x > e^2$



$e \leq x < e^2$

9) $\sqrt{2 - \ln x} > \ln x$

1° $f(x) \geq 0$

$g(x) < 0 \quad \to \ln x < 0$

$0 < x < 1$

$f(x) \geq 0 \Rightarrow 2 - \ln x \geq 0$

$\boxed{x>0}$

$\ln x \leq 2$

$\boxed{x \leq e^2}$

C.E: $0 < x \leq e^2$

$\Rightarrow 0 < x < 1$

2° $g(x) \geq 0 \quad \to \ln x \geq 0$

$x \geq 1$

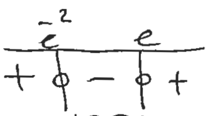
$2 - \ln x > \ln^2 x$

$\ln^2 x + \ln x - 2 < 0$

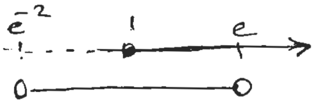
$(\ln x - 1)(\ln x + 2) = 0$

$\ln x = 1 \qquad \ln x = -2$

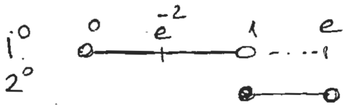
$x = e \qquad x = e^{-2}$



$e^{-2} < x < e \quad \wedge \quad x \geq 1$



$\Rightarrow [1, e)$



$1° \cup 2° \Rightarrow x \in (0, e)$

10) $\log_{1/3}(10x-1) < 2$

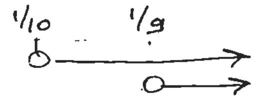
$10x-1>0$
$x>1/10$ C.E.

$10x-1 > \left(\frac{1}{3}\right)^2$ perché $0<1/3<1$

$10x > \frac{1}{9}+1$

$\cancel{10}x > \frac{\cancel{10}}{9}$

$x > 1/9$



$\Big\}$ $x > 1/9$ ovvero $x \in \left(\frac{1}{9}, \infty\right)$

11) $\log_2(x-3) > \log_4(5x-1)$

$x-3>0 \quad\quad 5x-1>0$
$x>3 \quad \wedge \quad x>1/5$

$$\log_4(5x-1) = \frac{\log_2(5x-1)}{\log_2(4)} = \frac{\log_2(5x-1)}{2}$$

$2\log_2(x-3) > \log_2(5x-1)$

$(x-3)^2 > 5x-1$

$x^2-6x+9 > 5x-1$

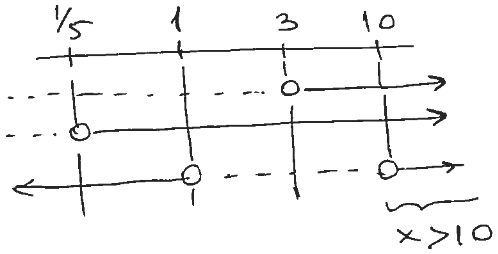
$x^2-11x+10>0$

$(x-10)(x-1)>0$

$x=10 \quad x=1$

1		10	
$+$	$-$		$+$

$x<1 \vee x>10$



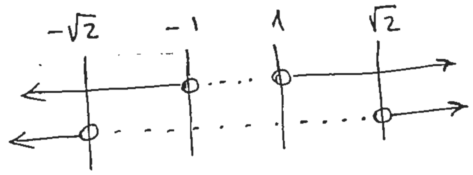
Soluzione: $(10, \infty)$

12) $\log_{1/2}(x^2-1) < 0$

$x^2-1>0$
$x=\pm 1$

	-1	1
$+$	$-$	$+$

$x<-1 \vee x>1$ (C.E.)



$x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$

$\log_{1/2}(x^2-1) < 0$

$x^2-1 > \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

$x^2-2>0$

$x = \pm\sqrt{2}$

	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$+$	$-$	$+$

$\Bigg\}$ $x<-\sqrt{2} \vee x>\sqrt{2}$

13) $\log_{\sqrt{3}}(x) - 5\log_3(x) < 2$

C.E $x > 0$

$\log_{3^{1/2}}(x) - 5\log_3(x) < 2$

$2\log_3(x) - 5\log_3(x) < 2$

$\log_3(x^2) - \log_3(x^5) < 2$

$\log_3 \frac{\cancel{x^2}}{x^{\cancel{5}3}} < 2 \longrightarrow \log_3 \frac{\cancel{x^2}}{x^{\cancel{5}3}} < 2$

$\frac{1}{x^3} < 3^2$

$x^3 > \frac{1}{9}$

$x > \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \Rightarrow$ Sol: $x > \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

14) $\ln^2(x^2) \leq 1$

C.E: $\mathbb{R} - \{0\}$

$\ln^2(x^2) \leq 1$

$t = \ln(x^2) \Rightarrow t^2 - 1 \leq 0$

$(t-1)(t+1) \leq 0$

$t = 1 \quad t = -1$

$t = 1 \Rightarrow \ln x^2 = 1$

$x^2 = e$

$x = \pm\sqrt{e}$

oppure

$t = -1 \Rightarrow \ln x^2 = -1$

$x^2 = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{e}}$

	$-\sqrt{e}$		$-1/\sqrt{e}$		$1/\sqrt{e}$		$\sqrt{e}$	
+	•	−	•	+	•	−	•	+

$-\sqrt{e} \leq x \leq -1/\sqrt{e}$, $\frac{1}{\sqrt{e}} \leq x \leq \sqrt{e}$

Sol: $[-\sqrt{e}, -1/\sqrt{e}] \cup [1/\sqrt{e}, \sqrt{e}]$

Oppure;

		$-\sqrt{e}$		$-1/\sqrt{e}$		$1/\sqrt{e}$		$\sqrt{e}$	
Fattore 1	+	•	−		−		−	•	+
Fattore 2	+		+	•	−	•	+		+

$-\sqrt{e} \leq x \leq -1/\sqrt{e}$ V $1/\sqrt{e} \leq x \leq \sqrt{e}$

Lezione 3 - Esponenziale: Definizione e Proprietà

Def 1. Se "a" è un numero reale qualunque e "m" è un naturale maggiore o uguale a 2, si definisce potenza di base a ed esponente m il numero

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \dots a}_{m\text{-volte}}$$

Le proprietà delle potenze:

1) $(a^m)^n = a^{mn}$

2) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

3) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

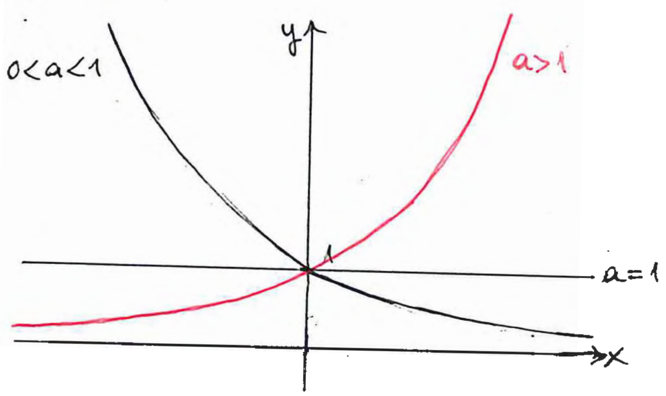
4) $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$, $a>0$

Def 2. Una funzione esponenziale é una funzione data da una potenza in cui la base è costante e l'esponente è variabile, e della forma:

$$f(x) = a^x \quad , a>0 \ , x \in \mathbb{R}$$

I grafici delle funzioni esponenziali con base tra 0 e 1 e maggiore di 1

$y = a^x$ con $0<a<1$ e $a>1$



$y = a^x$

$x=0 \Rightarrow y=1$

Lezione 4 - Equazioni e Disequazioni Esponenziali

Esercizi 1) $2^{x^2-5x} - 64 = 0$

$2^{x^2-5x} = 2^6$

$x^2 - 5x = 6 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x-6)(x+1) = 0$

$x=6 \ , \ x=-1$

2) $5^{2x^2} = 3$

$\log_5 5^{2x^2} = \log_5 3$

$2x^2 = \log_5 3 \Rightarrow x^2 = \dfrac{\log_5 3}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{\log_5 3}{2}}$

3) $e^{3x}+e^{2x}-4e^{x}-4 \leq 0$

$$(e^x)^3+(e^x)^2-4e^x-4 \leq 0$$

Ponendo $e^x = t$

$$t^3+t^2-4t-4 \leq 0$$

Con un raccoglimento parziale avremo:

$t^2(t+1)-4(t+1) \leq 0$, raccogliendo a fattor comune:

$$(t^2-4)(t+1) \leq 0$$

Studio del segno: Fattore 1

$$t^2-4=0$$
$$t=\pm 2$$

Fattore 2: $t+1=0$

$$t=-1$$

		-2		-1		2	
F1	+	●	−		−	●	+
F2	−		−	●	+		+

$t \leq -2 \vee -1 \leq t \leq 2$

- $t \leq -2$

$e^x \leq -2$

Nessun soluzione

- $-1 \leq t \leq 2$

$-1 \leq e^x \leq 2$

$\Downarrow$

$e^x \geq -1$ soddisfatto per ogni $\Rightarrow x \in \mathbb{R}$

$e^x \leq 2$

$x \cdot \ln e \leq \ln(2)$

$x \leq \ln(2)$

$\Rightarrow$ sol: $\boxed{x \leq \ln(2)}$

4) $e^{2x}-5e^x+6>0$

Ponendo $e^x=t$

$$t^2-5t+6>0$$

$$(t-3)(t-2)>0$$

$t=3$ $\quad$ $t=2$

	2		3	
+	○	−	○	+

$t<2 \vee t>3$

- $t<2$

$e^x<2$

$x<\ln(2)$

- $t>3$

$e^x>3$

$x>\ln(3)$

Sol: $x<\ln 2 \vee x>\ln(3)$

5) $\sqrt{e^x-2} < e^x-1$

C.E: $e^x-2 \geq 0$

$e^x \geq 2$

$x \geq \ln(2)$

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \rightarrow x \geq \ln(2) \\ g(x)>0 \longrightarrow e^x-1>0 \Rightarrow e^x>1 \\ \qquad x>\ln(1) \\ \qquad x>0 \\ f(x)<[g(x)]^2 \end{array}\right\} x \geq \ln(2)$$

$\Downarrow$

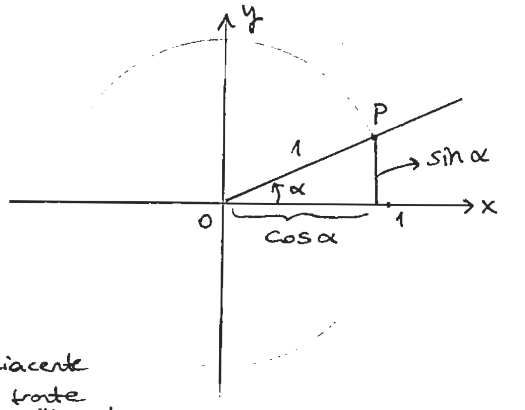
$e^x-2 < e^{2x}-2e^x+1$

$e^{2x}-3e^x+3>0$

$e^x=t \Rightarrow \underbrace{t^2-3t+3}_{\Delta<0}>0 \Rightarrow t\in\mathbb{R} \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}$

UNITÀ 6 _ Trigonometria

Lezione 1 _ Funzioni goniometriche



$\underline{\cos\alpha}$: il lato adiacente
$\underline{\sin\alpha}$: il lato di fronte all'angolo

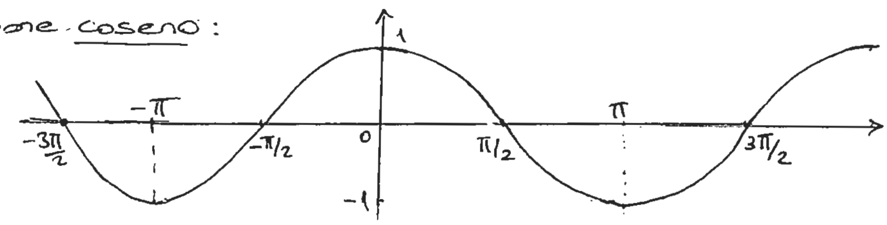
Il punto P della circonferenza goniometrica $P(x_P, y_P)$
L'ascissa del punto P si chiama coseno del α ; l'ordinata del P si chiama seno del α, e si scrive
$x_P = \cos(\alpha)$, $y_P = \sin(\alpha)$

Gli angoli più importanti hanno le misure indicate nella tabella:

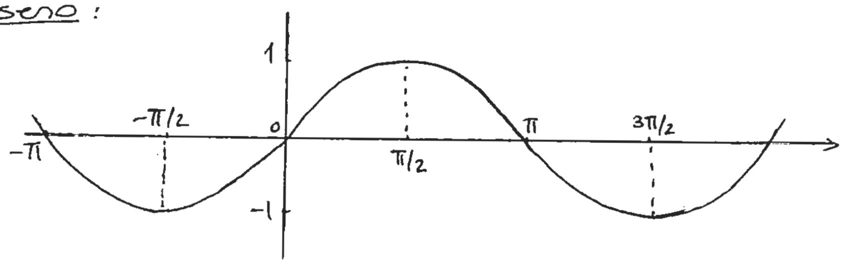
α°	α
0°	0
30°	$\pi/6$
45°	$\pi/4$
60°	$\pi/3$
90°	$\pi/2$
180°	π
270°	$3\pi/2$
360°	2π

, dove α° indica la misura in gradi e
α " quella in radianti

La funzione <u>coseno</u> :

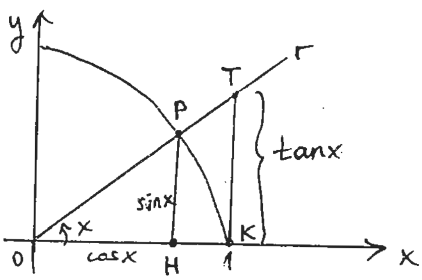


La funzione <u>seno</u> :



Queste due funzioni sono periodiche (di periodo 2π) che hanno un andamento oscillante.

Funzione seno: $\sin x : \mathbb{R} \to [-1,1]$
Funzione coseno: $\cos x : \mathbb{R} \to [-1,1]$



|TK| : si dice funzione tangente e si indica con y=tan

$O\hat{P}H$ e $O\hat{T}K$ sono simili

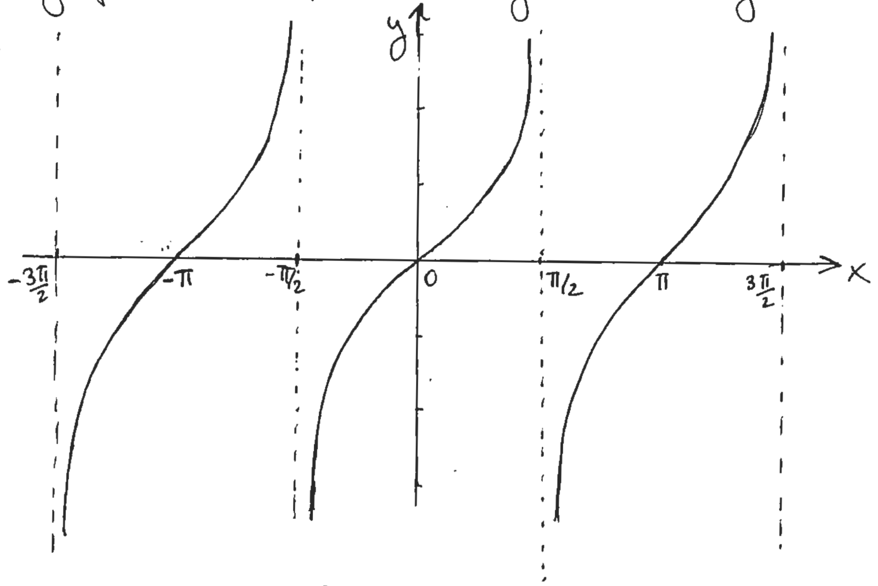
i coefficienti angolari di due triangoli :

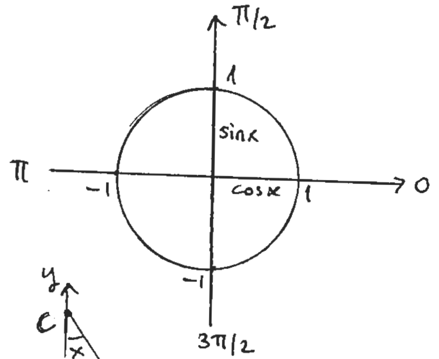
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

(<u>il rapporto</u>) del. lato di fronte all'angolo con il lato adiacente

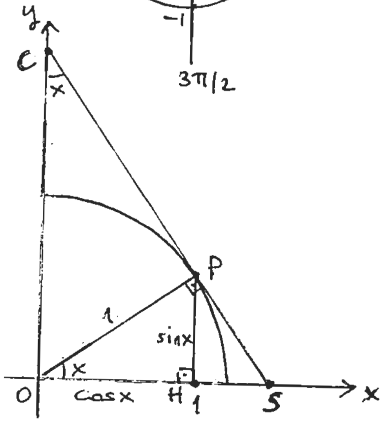
$\tan(x) : \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$

Il grafico della funzione tangente è il seguente:





$\cos 0 = 1$	$\sin 0 = 0$	$\tan(0) = 0$
$\cos \pi/2 = 0$	$\sin \pi/2 = 1$	$\tan(\pi/2) \to$ non é definita
$\cos \pi = -1$	$\sin \pi = 0$	$\tan(\pi) = 0$
$\cos 3\pi/2 = 0$	$\sin 3\pi/2 = -1$	$\tan(3\pi/2) \to$ non é definita



Si considerano i triangoli $\hat{SOP}$ e $\hat{POH}$

Dato che sono 2 triangoli simili;

$$OS : OP = OP : OH$$

$$OP = 1$$

Quindi $OS = \dfrac{1}{OH} \Rightarrow \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

si chiama secante

La funzione secante è definita su tutto l'asse reale ad eccezione dei punti che annullano il coseno ($x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) e il codominio è invece tutto $\mathbb{R}$ escluso l'intervallo $(-1, 1)$. Avremo allora;

$$\sec(x) : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \longrightarrow \mathbb{R} - (-1, 1)$$

Similmente dato che $\hat{OCP}$ e $\hat{POH}$ sono simili;

$$OC : OP = OP : PH$$

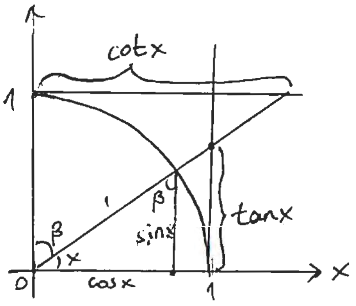
Dato che $OP = 1$; $OC = \dfrac{1}{PH} \Rightarrow \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

si chiama cosecante

La funzione cosecante è definita come:

$$\csc(x) : \mathbb{R} - \{k\pi\} \longrightarrow \mathbb{R} - (-1, 1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Il coefficiente angolare di β è uguale al rapporto del lato di fronte all'angolo β con il lato adiacente.

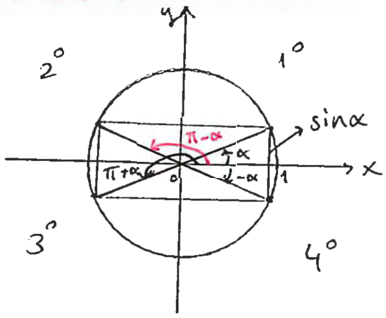


$$m_\beta = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$
↳ si chiama cotangente

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

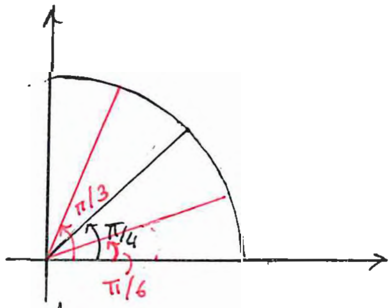
$\cot(x) : \mathbb{R} - \{k\pi\} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$

Lezione 2 _ Simmetrie

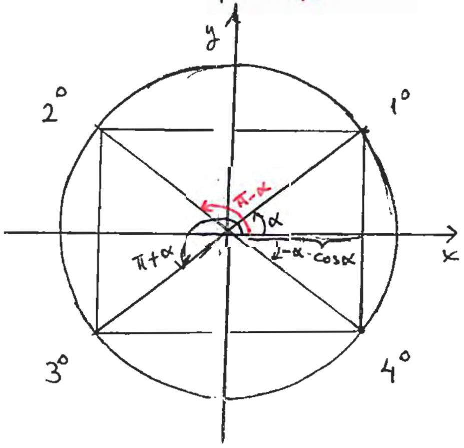


$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$
$\sin(\pi + \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

$\sin\alpha > 0$ prima e seconda regione
$\sin\alpha < 0$ 3° & 4°

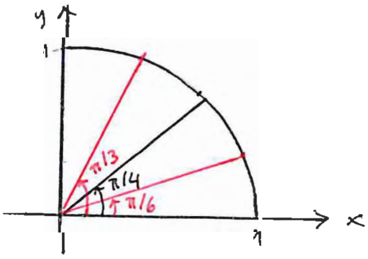


$\sin(\pi/6) = 1/2$
$\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$
$\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$

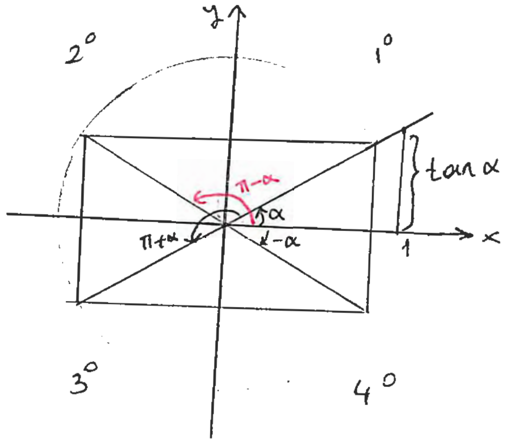


$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$

$\cos\alpha > 0$ 1° & 4° regione
$\cos\alpha < 0$ 2° & 3° regione



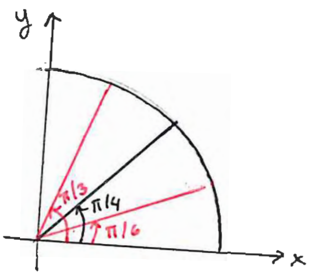
$\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$
$\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$
$\cos(\pi/3) = 1/2$



$\tan\alpha > 0$ (1° e 3° regione)

$\tan\alpha < 0$ (2° e 4° regione)

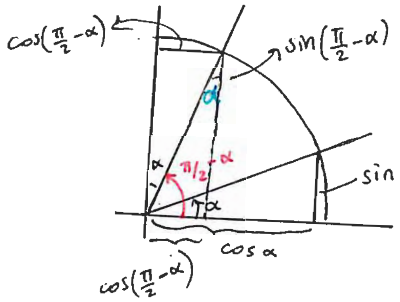
$$\tan(\pi+\alpha) = \tan(\alpha)$$
$$\tan(\pi-\alpha) = \tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$



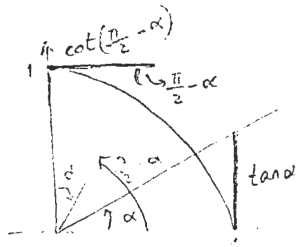
$$\tan(\pi/6) = \frac{\sin(\pi/6)}{\cos(\pi/6)} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \; ; \quad \tan(0) = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1 \; ; \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{0} \rightarrow \text{non è definita}$$

$$\tan(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3} \; ;$$

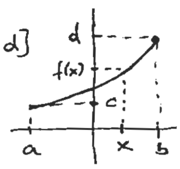


$$\sin(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$
$$\cos(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$
$$\tan(\alpha) = \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$



$y = f(x)$

$f: [a,b] \rightarrow [c,d]$



Se esiste l'imagine di esiste la inverso

Lezione 3 _ Funzioni Goniometriche Inverse

Si può osservare dal grafico (della funz. seno), la funzione seno non è invertibile. Quindi restringiamo il codominio all'immagine della funzione (in modo da renderla suriettiva) e come insieme di definizione, si sceglie, per convenzione, l'intervallo

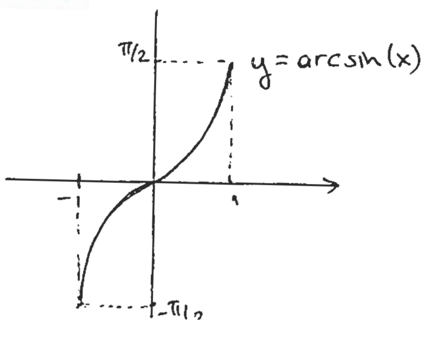
$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ovvero consideriamo:

$$\sin(x) : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$

che sarà, in questo modo, una funzione iniettiva e suriettiva (e quindi invertibile) biunivoca

A questo punto possiamo parlare di funzione inversa e quindi dell'arcoseno che è definito come:

$$\arcsin(x) : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

Esempi: $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi/4$

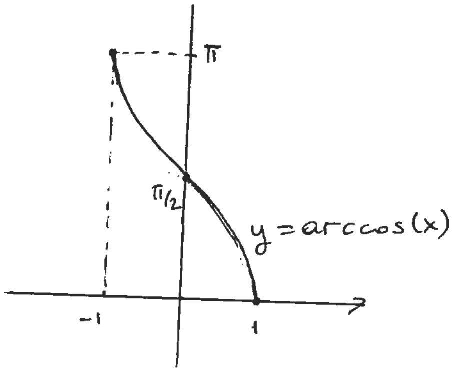
$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi/6$

Anche la funzione coseno non è invertibile, quindi facciamo lo stesso procedimento, cioè; restringiamo il codominio all'immagine e scegliamo come insieme di definizione, per convenzione, l'intervallo $[0,\pi]$, ovvero consideriamo $\cos(x):[0,\pi]\longrightarrow[-1,1]$.

Quindi l'arcocoseno è definito come:

$\arccos(x):[-1,1]\longrightarrow[0,\pi]$

$\arccos(-x) = -\arccos(x)+\pi$



Esempi: $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi/4$

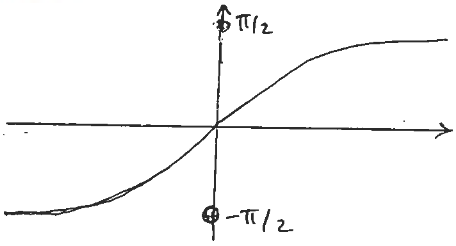
$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}+\pi = \frac{2\pi}{3}$

Funzione arcotangente: Restringiamo l'insieme di definizione all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$;

$\tan(x):\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\longrightarrow\mathbb{R}$

$\arctan(x):\mathbb{R}\longrightarrow\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$\arctan(-x) = -\arctan(x)$



Esempi: $\arctan(1)=\pi/4$

$\arctan(-\sqrt{3}) = -\arctan(\sqrt{3})$

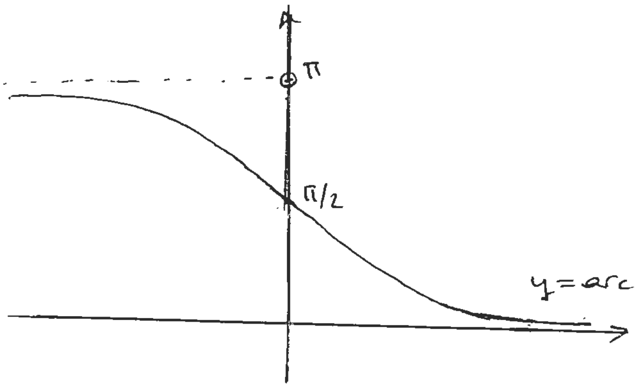
$= -\pi/3$

Funzione arcocotangente: Similmente;

$\cot(x):(0,\pi)\longrightarrow\mathbb{R}$

$\operatorname{arccot}(x):\mathbb{R}\longrightarrow(0,\pi)$

$\operatorname{arccot}(-x) = -\operatorname{arccot}(x)+\pi$

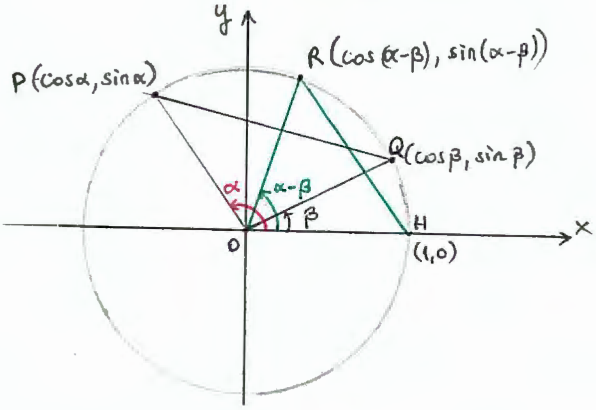


Esempi: $\operatorname{arccot}(\sqrt{3}) = \pi/6$

$\operatorname{arccot}(-1) = -\operatorname{arccot}(1)+\pi$

$= -\frac{\pi}{4}+\pi = \frac{3\pi}{4}$

Lezione 4 – Formule Base



Consideriamo due angoli α, β nella circonferenza goniometrica e supponiamo che $\alpha > \beta$.

$$|PQ| = |RH|$$

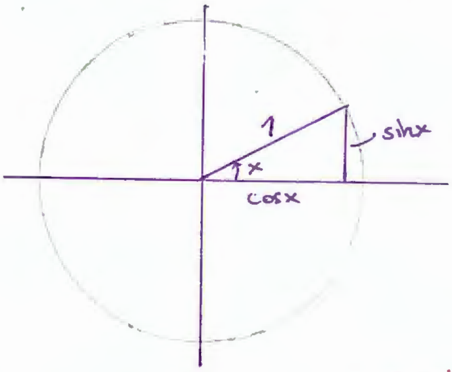
$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = (\cos(\alpha-\beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha-\beta)$$

Identità fondamentale della trigonometria:

L'identità fondamentale permette di scrivere il seno in termini del coseno e viceversa.

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$



Formule di sommazione e sottrazione degli angoli per seno, coseno, tangente

Le formule di sommazione per archi permettono di riscrivere le funzioni goniometriche applicate alla somma di due angoli (o alla differenza) disaccoppiando gli angoli.

$$|PQ| = |RH|$$

$$\cancel{\cos^2\alpha} - 2\cos\alpha\cos\beta + \cancel{\cos^2\beta} + \cancel{\sin^2\alpha} - 2\sin\alpha\sin\beta + \cancel{\sin^2\beta} = \cancel{\cos^2(\alpha-\beta)} - 2\cos(\alpha-\beta) + \cancel{1} + \cancel{\sin^2(\alpha-\beta)}$$

$$-2\cos(\alpha-\beta) = -2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$$

$$\boxed{\begin{aligned} * \ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}}$$

$$\boxed{\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \quad \text{dove } \alpha, \beta, \alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}}$$

→ da cui basta sostituire al posto di β il valore $-\beta$ ottendo: $\cos(-\beta) = \cos\beta$; $\sin(-\beta) = -\sin\beta$

$* \ \alpha \mapsto \pi/2 - \alpha$; $\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \sin(\alpha+\beta)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$

$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta) = \ldots$

così abbiamo

Invece per l'ultima, basta sostituire β con $-\beta$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\ldots}{\ldots}$$

— addizione e sottrazione —

e per ottenere $\tan(\alpha-\beta)$ basta sostituire β con $-\beta$

dividiamo il numeratore e il denominatore per $\cos\alpha\cos\beta$

Formule di duplicazione

Le formule di duplicazione permettono di esprimere in modo alternativo una funzione trigonometrica applicata al doppio di un angolo.

Utilizzando le formule
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

se $\beta=\alpha$;

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$

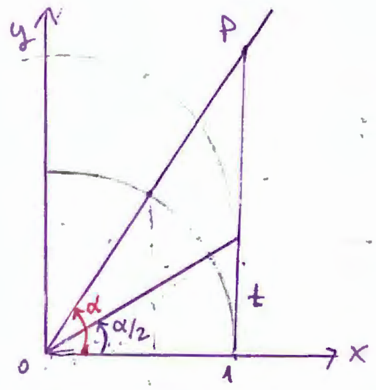
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$= 1-2\sin^2\alpha$$

$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$ dove $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \wedge \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Formule parametriche per funzioni trigonometriche

Le formule parametriche sono essenziali nella risoluzione delle equazioni goniometriche e disequazioni trigonometriche.



$\tan \alpha/2 = t$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\sin(\alpha) = 2\sin(\alpha/2)\cdot\cos(\alpha/2)$$
$$= \frac{2\sin(\alpha/2)\cdot\cos(\alpha/2)}{\sin^2(\alpha/2)+\cos^2(\alpha/2)}$$
$$= \frac{\frac{2\sin(\alpha/2)\cdot\cos(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)}}{\frac{\sin^2(\alpha/2)+\cos^2(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)}} = \frac{2\,\frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}}{\frac{\sin^2(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)}+1}$$
$$= \frac{2\tan(\alpha/2)}{\tan^2(\alpha/2)+1} = \frac{2t}{t^2+1}$$ (Poniamo $\tan\alpha/2 = t$)

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos\alpha &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \tan\alpha &= \frac{2t}{1-t^2} \end{aligned}}$$

Esercizio: 1) Verificare che $\sin(30°+x)+\cos(60°+x)=\cos x$

$\cos(60°+x)=\sin(90°-(60°+x))=\sin(90°-60°-x)=\sin(30°-x)$

Quindi,

$\sin(30°+x)+\sin(30°-x)=\cos x$

$\sin(30°+x)=\sin(30°)\cos x+\sin x\cos(30°)$
$\sin(30°-x)=\sin(30°)\cos x-\sin x\cos(30°)$

$\sin(30°)\cos x+\cancel{\sin x\cos(30°)}+\sin(30°)\cos x-\cancel{\sin x\cos(30°)}=\cos x$

$2\sin(30°)\cos x=\cos x \quad ; \quad \sin(30°)=1/2$

$\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}}\cos x=\cos x$

$\cos x=\cos x$ verificata!

2) Semplificare $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha)+\cos(\beta)}$

N: $[\sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)][\sin(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\beta)\cos(\alpha)]$

$=\sin^2(\alpha)\cos^2(\beta)-\sin^2(\beta)\cos^2(\alpha)$

Ora aggiungiamo e sottraiamo $\cos^2(\alpha)\cos^2(\beta)$

$\underline{\sin^2(\alpha)\cos^2(\beta)}-\sin^2(\beta)\cos^2(\alpha)+\underline{\cos^2(\alpha)\cos^2(\beta)}-\cos^2(\alpha)\cos^2(\beta)$

Raccogliamo $\cos^2(\beta)$ e $-\cos^2(\alpha)$

$=\cos^2(\beta)[\underbrace{\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)}_{1}]-\cos^2(\alpha)[\underbrace{\sin^2(\beta)+\cos^2(\beta)}_{1}]$

$=\cos^2(\beta)-\cos^2(\alpha)$

L'espressione originale si riduce quindi a:

$$\frac{(\cos(\beta)-\cos(\alpha))\cancel{(\cos(\beta)+\cos(\alpha))}}{\cancel{\cos(\alpha)+\cos(\beta)}}=\cos(\beta)-\cos(\alpha)$$

3) Verificare che $\dfrac{2\sin(\pi/4-x)}{\cos(x+\pi/4)+\cos(x-\pi/4)}=1-\tan(x)$

Numeratore : $2[\sin\pi/4\cos x-\sin x\cos\pi/4]=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)=\sqrt{2}(\cos x-\sin x)$

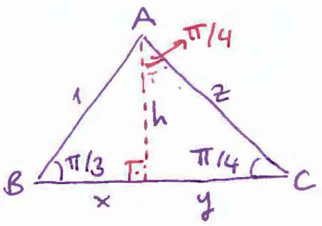
Denominatore : $\cos x\cdot\cos\pi/4-\cancel{\sin x\sin\pi/4}+\cos x\cdot\cos\pi/4+\cancel{\sin x\sin\pi/4}=2\cos x\cdot\cos\pi/4$
$=\sqrt{2}\cos x$

$$\frac{\cancel{\sqrt{2}}(\cos x-\sin x)}{\cancel{\sqrt{2}}\cos x}=1-\tan(x)$$

Per la pagina 20

4) Calcolare il perimetro del triangolo $A\hat{B}C$ sapendo che $\hat{C} = \pi/4$

$\hat{B} = \pi/3$ e $\overline{AB} = 1$



$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{x}{1}$ $\Rightarrow$ $x = 1/2$

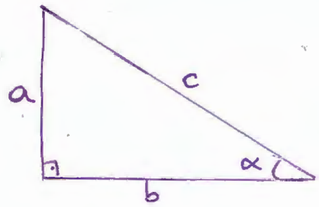
$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = h$ $\Rightarrow$ $h = \frac{\sqrt{3}}{2} = y$

$z = \sqrt{h^2 + y^2}$

$z = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$$P = x + y + z + 1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} + 1 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6} + 3}{2}$$

5) L'area di un triangolo rettangolo è di $54\,m^2$ e la tangente di uno degli angoli acuti misura $3/4$. Calcolare il perimetro del triangolo.



$$A = \frac{a \cdot b}{2} = 54 \Rightarrow a \cdot b = 108$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{3b}{4}$$

Sostituendo tale relazione in quella inerente l'area del triangolo:

$$\frac{3}{4} b \cdot b = 108 \Rightarrow b^2 = 144 \Rightarrow b = 12\,cm.$$

e quindi $a = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9\,cm.$

Utilizzando il teorema di Pitagora;

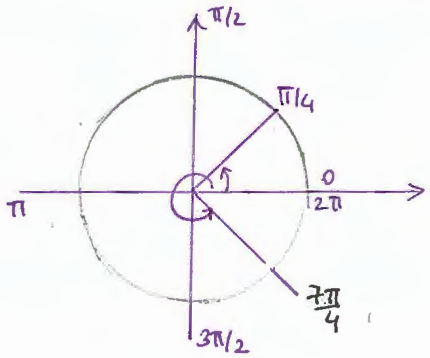
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15\,cm.$$

$$P = a + b + c = 9 + 12 + 15 = 36\,cm$$

Lezione 5 – Equazioni e Disequazioni

1) $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x = \pi/4 + 2k\pi \quad \vee \quad x = \underbrace{7\pi/4}_{2\pi - \pi/4} + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$



$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

2) $\tan(x) = \sqrt{3}$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$ (ricordando che la tangente è una funzione periodica di periodo π)

3) $\cos x > 0$

Dato che coseno è positivo nella regione 1 e 4:

Sol: $0 < x < \pi/2 \quad \vee \quad \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

Aggiungendo la periodicità:

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad \frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$

C.E: $\forall x \in \mathbb{R}$

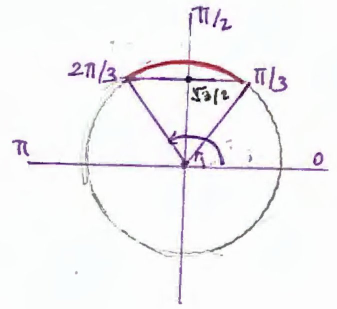
4) $2\sin x > \sqrt{3}$

C.E: $\forall x \in \mathbb{R}$

Dato che la funz. seno é periodica di periodo 2π basta considerare l'intervallo $[0, 2\pi]$

$\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$



$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

$\sin\alpha > 0$ (1° e 2 regi

$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$= \sin(2\pi/3)$

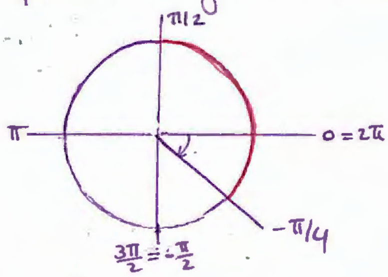
5) $\sqrt{\tan(x)+1} > \tan(x)$

La funz. tangente é periodica di periodo π, quindi restringiamo il dominio all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

1° $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} \tan(x)+1 \geq 0 \\ \tan(x) \geq -1 \end{array}$

C.E: $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

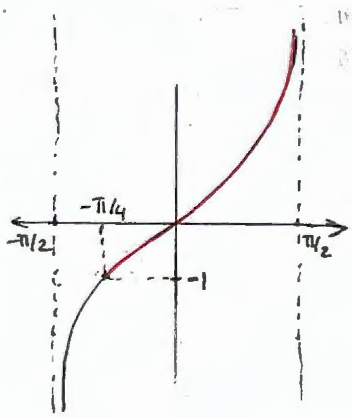
2° $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$



$\tan(\pi/4) = 1$

$\tan(\pi - \alpha) = \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

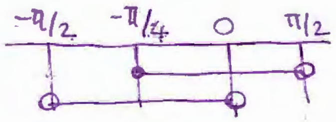
$\tan(-\pi/4) = -1$



Se $g(x) < 0$

$\tan(x) < 0 \Rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

1°:



$\Rightarrow \left[-\pi/4, 0\right)$

Se $g(x) \geq 0$

$\tan(x) \geq 0 \Rightarrow x \in [0, \pi/2) \xrightarrow{\tan(0)=0} 0 \leq \tan x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\tan(x)+1 > \tan^2 x$

$\tan^2 x - \tan x - 1 < 0$

$\tan x = t \Rightarrow t^2 - t - 1 < 0$

$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < \tan x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

2°: $\left[0, \arctan\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$

$1° \cup 2° = \left[-\pi/4, \arctan\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$

6) $4\sin x > \frac{1}{\cos x}$

Consideriamo l'intervallo $[0, 2\pi]$ come il dominio delle funzioni seno e coseno.

C.E : $\cos x \neq 0$

$x \neq \frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$

$4\sin x - \frac{1}{\cos x} > 0$

$\frac{4\sin x \cos x - 1}{\cos x} > 0$

$\frac{2\sin 2x - 1}{\cos x} > 0$

N : $2\sin 2x - 1 > 0$

$\sin 2x > \frac{1}{2}$

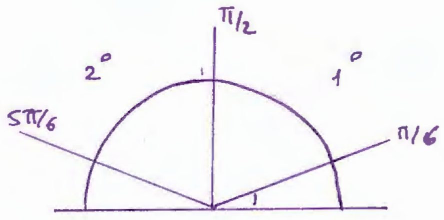
Ponendo $\alpha = 2x$

$\sin\alpha > 1/2$

$\pi/6 < \alpha < 5\pi/6$

$\pi/6 < 2x < 5\pi/6$

$\boxed{\pi/12 < x < 5\pi/12}$



$\sin(\pi/6) = 1/2$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

$\sin \pi/6 = \sin \frac{5\pi}{6}$

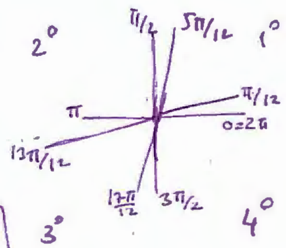
1) Se $\cos x > 0$;

D : $\cos x > 0$ nelle regioni 1 e 4

Dato che $f(x) = \sin 2x$ ha periodo π perchè $f(x) = f(x+\pi)$

Num. positivo

$\Rightarrow \pi/12 + \pi < x < 5\pi/12 + \pi$ oppure $\frac{13\pi}{12} < x < \frac{17\pi}{12}$



Però dato che $\cos x > 0$ solo nelle regioni 1 e 4. $\Rightarrow \boxed{\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}}$

2) Se $\cos x < 0$;

D : $\cos x < 0$ nelle regioni 2 e 3

N : $2\sin 2x - 1 < 0$

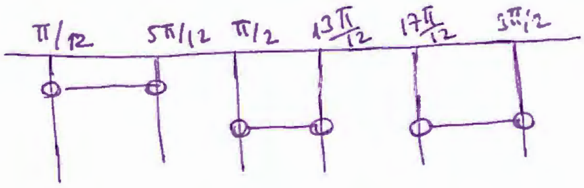
$\sin 2x < 1/2$

Prendendo il complemento ;

$0 < x < \pi/12 \quad \vee \quad \frac{5\pi}{12} < x < \frac{13\pi}{12} \quad \vee \quad \frac{17\pi}{12} < x < 2\pi$

Però dato che $\cos x < 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\pi}{2} < x < \frac{13\pi}{12} \quad \vee \quad \frac{17\pi}{12} < x < \frac{3\pi}{2}}$

1° ∪ 2° $\Rightarrow$

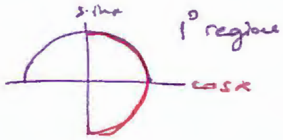


$\pi/12 < x < 5\pi/12 \quad \vee \quad \pi/2 < x < 13\pi/12 \quad \vee \quad 17\pi/12 < x < 3\pi/2$

7) $\log_2 \sin x < \log_{1/2}(4\cos x)$

$$\underset{2^{-1}}{1/2}$$

Consideriamo l'intervallo $[0, 2\pi)$



$$\log_2 \sin x < \log_2 (4\cos x)^{-1}$$

$\sin x > 0$, $\cos x > 0$ $\Rightarrow (0, \frac{\pi}{2})$ C.E.

$$\sin x < \frac{1}{4\cos x}$$

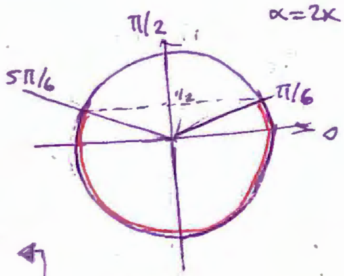
$$\sin x - \frac{1}{4\cos x} < 0$$

$$\frac{2\sin 2x - 1}{4\cos x} < 0$$

Dato che $\cos x > 0$

$$2\sin 2x - 1 < 0$$

$$\sin 2x < 1/2$$



$0 < 2x < \pi/6 \ \vee \ \frac{5\pi}{6} < 2x < 2\pi$

$0 < x < \pi/12 \ \vee \ \frac{5\pi}{12} < x < \pi$

$\sin\alpha > 1/2$ $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{5}{}$

$\sin\alpha < 1/2 \Rightarrow 0 < \alpha < \pi/6$

$5\pi/6 < \alpha < 2\pi$

Considerando il C.E $\Rightarrow$

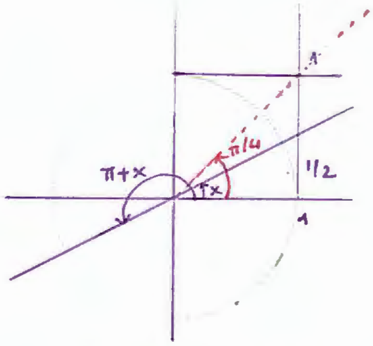
$0 < x < \pi/12 \ \vee \ \frac{5\pi}{12} < x < \frac{\pi}{2}$

8) $4\sin^2 x - \underbrace{2\sin 2x}_{2\sin x\cos x} + \cos^2 x \leq 0$ C.E $[0, 2\pi)$

$$(2\sin x - \cos x)^2 \leq 0$$

$2\sin x - \cos x = 0$, se $\cos x \neq 0$

$$\frac{2\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x}$$



$2\tan x = 1 \Rightarrow \tan x = 1/2 \Rightarrow x = \arctan(\frac{1}{2})$

$\tan(\pi + x) = \tan x$

se $\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} \vee x = 3\pi/2 \Rightarrow \sin x = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$ quindi se $\cos x = 0 \Rightarrow 2\sin x - \cos x \neq 0$ NO!

Da cui $\cos x \neq 0$ $(x \neq \frac{\pi}{2}, x \neq 3\pi/2)$ e $x = \arctan(\frac{1}{2})$ e $x = \arctan(\frac{1}{2}) + \pi$

9) $\cos x - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin x \geq 1$ C.E. $[0, 2\pi)$

Utilizzando le formule parametriche;

$t = \tan(x/2) \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ & $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\frac{2t}{1+t^2}\right] \geq 1$ moltiplichiamo entrambe le parti con $(1+t^2)$

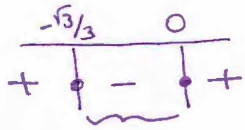
$$\cancel{1} - t^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}t \geq \cancel{1} + t^2$$

$$2t^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}t \le 0$$

$$t^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}t \le 0$$

$$t\left(t + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \le 0$$

$t = 0 \qquad t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

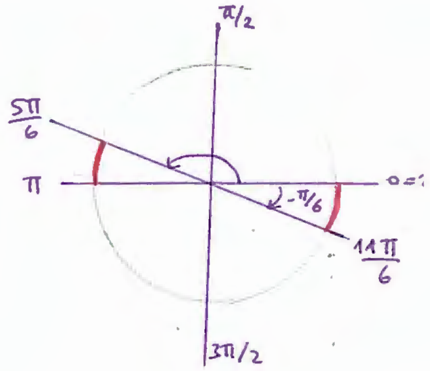


$$-\frac{\sqrt{3}}{3} \le t \le 0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} \le \tan\left(\frac{x}{2}\right) \le 0$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\underbrace{\tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)}_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$$



$$\frac{5\pi}{6} \le \frac{x}{2} \le \pi \quad \vee \quad \frac{11\pi}{6} \le \frac{x}{2} \le 2\pi$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\boxed{\frac{5\pi}{3} \le x \le 2\pi} \quad \vee \quad \cancel{\frac{11\pi}{3} \le x \le 4\pi}$$

NON È IN $[0, 2\pi]$

$\tan\pi = 0$

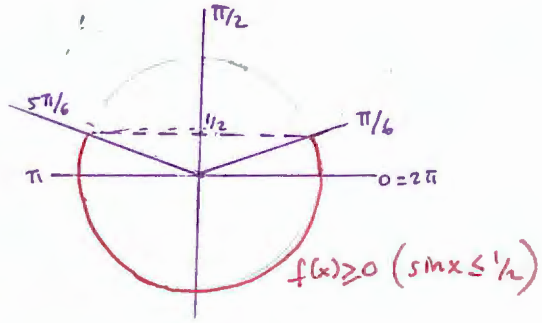
$\tan 2\pi = 0$

10) $\underbrace{(1 - 2\sin x)}_{f(x)}\underbrace{(2\cos x + \sqrt{3})}_{g(x)} \le 0 \qquad C.E: [0, 2\pi]$

Studiamo il segno dei due fattori a parte:

- $1 - 2\sin x \geq 0$

  $\sin x \le \frac{1}{2}$

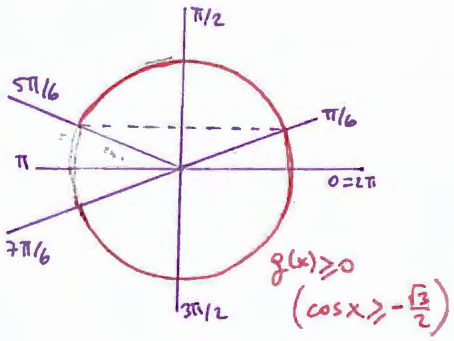


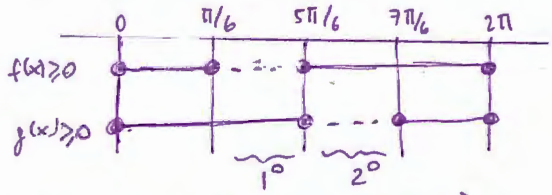
$$0 \le x \le \frac{\pi}{6} \quad \vee \quad \frac{5\pi}{6} \le x \le 2\pi$$

- $2\cos x + \sqrt{3} \geq 0$

  $\cos x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$0 \le x \le \frac{5\pi}{6} \quad \vee \quad \frac{7\pi}{6} \le x \le 2\pi$$





Il prodotto dei due fattori è negativo per:

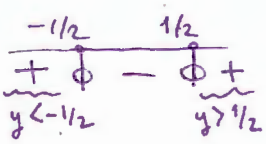
$$\boxed{\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{7\pi}{6}}$$

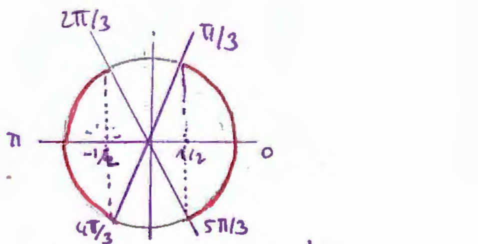
11) $\dfrac{(\cos^2 x - 1/4)}{\sqrt[3]{2\sin x - \sqrt{2}}} > 0 \qquad C.E: [0, 2\pi]$

N: $\cos^2 x - 1/4 > 0$

$\cos^2 x > 1/4$

$y = \cos x; \quad y^2 > 1/4 \Rightarrow y = \pm 1/2$





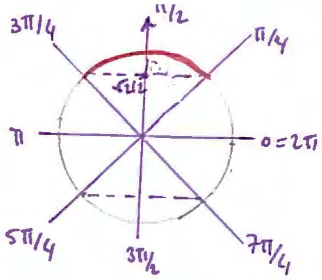
$\Rightarrow \cos x < -1/2 \quad \vee \quad \cos x > 1/2$

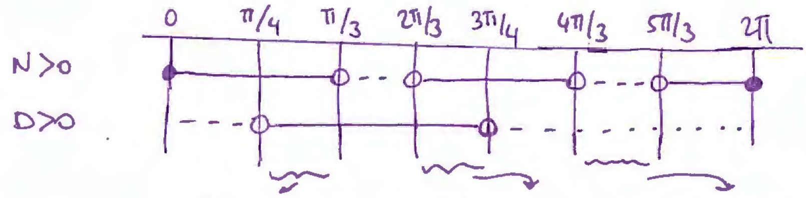
$$0 \le x < \pi/3 \ \vee\ \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} \ \vee\ \frac{5\pi}{3} < x \le 2\pi$$

$$D: \quad 2\sin(x) - \sqrt{2} > 0$$

$$\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

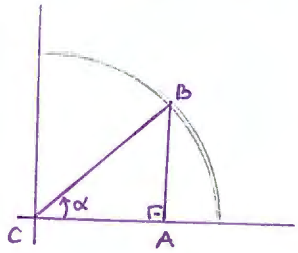
$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$$





$$\pi/4 < x < \pi/3 \ \vee \ 2\pi/3 < x < 3\pi/4 \ \vee \ \frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$$

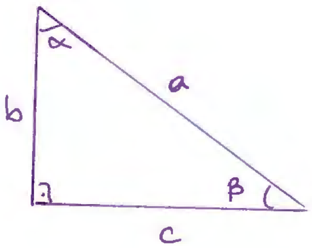
Lezione 6_ Triangoli



In un triangolo rettangolo, la misura di un cateto è data dal prodotto della misura dell'ipotenusa per il seno dell'angol opposto, e è data dal prodotto della misura dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente.

$$AB = BC \cdot \sin\alpha$$

$$AC = BC \cdot \cos\alpha$$



$b = a\sin\beta \quad \& \quad c = a \cdot \sin\alpha$

$b = a \cdot \cos\alpha \quad \& \quad c = a\cos\beta$

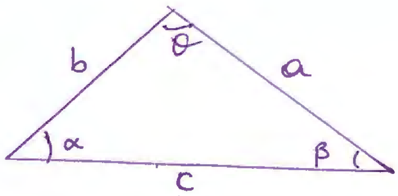
$\frac{b}{c} = \tan\beta \Rightarrow b = c\tan\beta$

$\frac{c}{b} = \tan\alpha \Rightarrow c = b \cdot \tan\alpha$

Teorema Dei Seni

Il teorema dei seni è uno dei teoremi della Trigonometria che ci permettono di risolvere i triangoli qualunque.

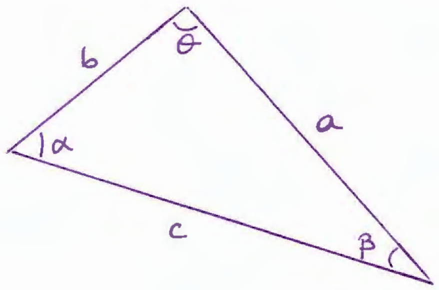
Quindi dato un triangolo qualsiasi il rapporto tra la misura di un lato ed il seno dell'angolo opposto è costante.



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\theta}$$

Teorema Del Coseno (Teorema di Carnot)

In un triangolo qualsiasi, il quadrato di un lato è dato dalla somma dei quadrati degli altri lati meno il loro doppio prodotto moltiplicato per il coseno dell'angolo ad essi compreso.



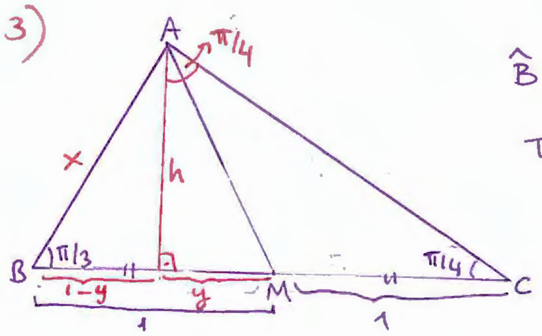
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta)$$

Esercizi di Trigonometria

1) Pagina 22 4)

2) Pagina 22 5)

3)



$\hat{B} = \pi/3$, $\hat{C} = \pi/4$, $BM = MC = 1$

Trovare AM.

$$1+y = h = x \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$
$$1-y = x \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}x$$

$$2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)x$$

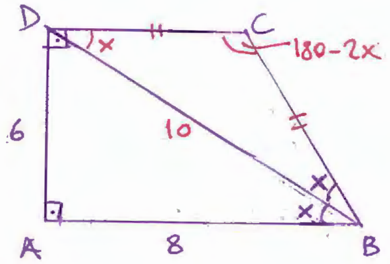
$$\Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{3}+1}$$

$$\Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}\,2}{\sqrt{3}+1} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{6-2\sqrt{3}}{2} = 3-\sqrt{3}$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}x = 1 - \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}\,2}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}+1-2}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$$

$$AM^2 = h^2 + y^2 = (3-\sqrt{3})^2 + (2-\sqrt{3})^2 = 9 - 6\sqrt{3} + 3 + 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 19 - 10\sqrt{3}$$

$$AM = \sqrt{19 - 10\sqrt{3}}$$

4) 

Calcolare l'area del trapezio rettangolare.

$$DB^2 = AB^2 + AD^2$$

$$DB = \sqrt{64+36} = 10$$

$$\cos x = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Ora applichiamo il teorema dei seni:

$$\frac{DC}{\sin x} = \frac{DB}{\sin(180-2x)} \quad ; \quad \sin(180-2x) = \sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$DC = \frac{DB \cdot \cancel{\sin x}}{2\cancel{\sin x}\cos x} = \frac{10}{2 \cdot \frac{4}{5}} = \frac{50}{8} = 25/4$$

$$A = \frac{DC+AB}{2} \cdot h = \frac{\frac{25}{4}+8}{\cancel{2}} \cdot \cancel{6}^{3} = \frac{57}{4} \cdot 3 = 171/4$$

5) Calcolare sin, cos, tan, cot dell'angolo $\pi/12$

$$\sin(\pi/12) = \sin 15° = \sin(60-45) \quad ; \quad \cos 15° = \cos(60-45)$$

$$\sin(60-45) = \sin 60 \cos 45 - \sin 45 \cos 60$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(60-45) = \cos 60 \cos 45 + \sin 60 \sin 45$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\tan 15° = \frac{\sin 15°}{\cos 15°} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{6-4\sqrt{3}+2}{6-2} = \frac{4(2-\sqrt{3})}{4} = 2-\sqrt{3}$$

$$\cot 15° = \frac{1 \quad (2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$$

MODULO 2 – Matematica di base – Aspetti teorici

UNITÀ 1 – Insiemi

Lezione 1 – Cos'è un insieme

Un insieme è una collezione di oggetti, detti elementi di qualsiasi tipo, di tipo numerico, logico o concettuale. Abitualmente, indicheremo gli insiemi con le lettere maiuscole dell'alfabeto: $A, B, \ldots$

Per indicare che un elemento x appartiene all'insieme A si scrive:

$$x \in A$$

e si legge "x appartiene ad A", mentre per indicare che un elemento <u>non</u> appartiene all'insieme A si scrive:

$$x \notin A$$

che si legge, naturalmente, "x non appartiene ad A".

Due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi. Questo si può scrivere, usando il simbolo $\forall$ ("per ogni"),

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x,\ x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

si legge "se e solo se"

È conveniente introdurre uno speciale insieme, detto <u>insieme vuoto</u> e indicato con $\emptyset$, privo di elementi.

Per assegnare un insieme possiamo usare due metodi:

1) Rappresentazione estensiva (per elencazione): consiste nell'elencare <u>tutti</u> gli elementi di un insieme, per esempio $A = \{0, \pi, \sqrt{2}, \text{Crema}\}$

2) Rappresentazione intensiva: consiste nell'assegnare gli elementi indicando una proprietà che li contraddistingue: $A = \{x : \text{proprietà di } x\}$

Questo metodo è sopratutto indicato per insiemi che contengono infiniti elementi. Per esempio per indicare l'insiemi dei numeri naturali multipli di 3, scriviamo

$A = \{3, 6, 9, 12, \ldots\} = \{x : x \text{ è un numero naturale multiplo di } 3\}$

Esempi 1) $I = \{x \in \mathbb{R} : -9 \leq 3x < 30\}$

$$-3 \leq x < 10$$

$$-4 \notin I \quad , \quad -\pi \notin I \quad , \quad \sqrt{7} \in I \quad , \quad 10 \notin I$$

2) $E = \{ x \in \mathbb{Z}^+ : [x/2] = x/2 \}$

interi

Gli elementi di E?

ricordateví che:

$[2.7] = 2$

$[10.1] = 10$

$5 \in E$? $[5/2] = [2.5] = 2$ no $5 \notin E$

$6 \in E$? $[6/2] = [3] = 3$ sì

E è l'insieme di interi pari

3) $I = \{ x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 \neq 0 \}$

$(x-1)(x-2)$

$x = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

Quindi $I = \mathbb{R} - \{1, 2\}$

Lezione 2 – Sottoinsiemi

Dati due insiemi A e B, se ogni elemento di A è anche elemento di B si dice che A è un sottoinsieme di B, e scriviamo

$$A \subseteq B \quad , \quad B \supseteq A$$

Osserviamo esplicitamente che, per ogni insieme A si ha $A \subseteq A$, cioè ogni insieme è contenuto in se stesso. Per indicare che $A \subseteq B$, ma che esiste qualche elemento di B che non è contenuto in A si usa la scrittura

$$A \subset B \quad , \text{ oppure } \quad B \supset A$$

e parliamo di sottoinsieme proprio.

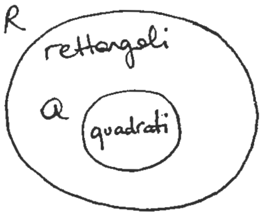
Tra i vari sottoinsiemi di un insieme possiamo sempre considerare l'insieme vuoto: $\emptyset \subseteq A, \forall A$.

Sottoinsiemi costituiti da un solo elemento: se $x \in A$, allora $\{x\} \subseteq A$.

Si noti la differenza che c'è tra i due simboli $\in \xrightarrow{\text{mette in relazione}}$ oggetti diversi (elementi e insiemi)

$\subseteq$ (o $\subset$) $\rightarrow$ " dello stesso tipo (insiemi)

Esempi: Consideriamo i due insiemi R e Q con le seguenti proprietà:



$$\left.\begin{array}{l} \forall q \in Q \,,\, q \in R \\ \exists a \in R \,,\, a \notin Q \end{array}\right\} \quad Q \subset R$$

esiste

Diagramma di Venn