Alcune osservazioni su insiemi:

Insieme Delle Parti

Sia A un insieme. L'insieme delle parti di A è l'insieme i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi di A, e si indica con

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

Esempi: Sia $X = \{x\}$. Allora $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{x\}\}$

Sia $A = \emptyset$. Allora $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$

Sia $A = \{1,2\}$. Allora $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

FINITO ed INFINITO

1) Insiemi Finiti ed Infiniti

Def: Due insiemi A e B hanno la stessa <u>cardinalità</u> se esiste una corrispondenza <u>biunivoca</u> $f: A \to B$. Si scrive allora $|A| = |B|$. Due insiemi che hanno la stessa cardinalità si dicono anche <u>equipotenti</u> (si scrive $A \sim B$).

Def: Un insieme A si dice <u>finito</u> se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che A è equipotente a $I_n = \{1, \dots, n\}$; in questo caso diciamo che A ha n elementi, cioè $|A| = n$. Si dice A è <u>infinito</u> se non è finito, cioè se non ha cardinalità n per alcun $n \in \mathbb{N}$, oppure <u>non</u> esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $A \sim I_n$.

Se un insieme A è finito, e se $B \subset A$, allora $A \not\sim B$, cioè non c'è alcuna biiettività tra i due. (Se $|A| = n$, $|B| = m$ allora $m < n$)

Corollario: Un insieme A è infinito se e solo se esiste un suo sottoinsieme proprio $B \subset A$ tale che $|B| = |A|$.

Per esempio, consideriamo

$$\left.\begin{aligned} &\overset{\text{naturali pari}}{P} = \{2, 4, 6, \dots, 2n\} \subset \mathbb{N} \\ &\qquad\;\; \updownarrow\; \updownarrow\; \updownarrow \qquad\quad \updownarrow \\ &\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n\} \end{aligned}\right\} \quad P \sim \mathbb{N} \quad (|P| = |\mathbb{N}|)$$

2) Numerabilità e Potenza Del Continuo

Insiemi Numerabili.

Un insieme A si dice <u>numerabile</u> se $|A| = |\mathbb{N}|$.

È evidente che ogni insieme numerabile è infinito. Gli elementi di un insieme numerabile si possono "numerare", cioè rappresentare nella forma

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

Ad esempio, sia P l'insieme dei naturali pari. Dato che $|P| = |\mathbb{N}|$, P è un insieme numerabile

Definizione: Siano A e B due insiemi. La cardinalità di A è minore o uguale della cardinalità di B se esiste una funzione iniettiva da A a B.
Si esprime in simboli: $\exists f: A \to B$ iniettiva $\Rightarrow |A| \leq |B|$.

È comune indicare con la notazione $|A| < |B|$ (strettamente minore) il fatto che $|A| \leq |B|$ ma A e B non hanno la stessa cardinalità, cioè, $|A| \neq |B|$. In altri termini, se esiste una funzione iniettiva da A a B ma non esiste una funzione biunivoca da A a B.

Esempi d'insiemi numerabili:

1) Consideriamo l'insieme degli numeri interi positivi $\mathbb{Z}^+$,

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} \\ \quad\ \ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow \\ \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\} \end{array}\right) \quad \mathbb{N} \sim \mathbb{Z}^+$$

$\exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^+$, $f(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, biunivoca

2) Invece se consideriamo $\mathbb{Z}$:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \\ \quad\ \ \updownarrow\ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow \\ \mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\} \end{array}\right) \quad \mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$$

$$\exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad f(n) = \begin{cases} -n/2 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \quad , \forall n \in \mathbb{N}, \text{ biunivoca}$$

Quindi $\mathbb{Z}$ è numerabile.

3) L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è numerabile.

Un insieme infinito ha la potenza del numerabile se ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$, ha la potenza del continuo se ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}$.

Ora vediamo se $\mathbb{R}$ è numerabile:

Proposizione: $\mathbb{R} \sim (0,1)$

Dimostrazione: Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \to (0,1)$ definita da

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} \qquad \begin{array}{l} x \to \infty,\ f(x) \to 1 \\ x \to -\infty,\ f(x) \to 0 \end{array}$$

Essa è, come si vede biunivoca:

$f(x_1) = f(x_2)$

$$\frac{e^{x_1}}{e^{x_1}+1} = \frac{e^{x_2}}{e^{x_2}+1}$$

$$e^{x_1}\cancel{e^{x_2}} + e^{x_1} = \cancel{e^{x_1+x_2}} + e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

iniettiva

$$\boxed{\forall y \in (0,1), \exists x \in \mathbb{R} \text{ tale che } f\left[\ln\left(\frac{y}{1-y}\right)\right] = y}$$ suriettiva

$$y = \frac{e^x}{e^x+1} \Rightarrow ye^x + y = e^x$$

$$e^x(y-1) = -y$$

$$e^x = \frac{-y}{y-1} = \frac{y}{1-y} \Rightarrow x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right) = f^{-1}$$

$$y \overset{f^{-1}}{\longmapsto} \ln\left(\frac{y}{1-y}\right) \in \mathbb{R}$$

$\square$

Teorema: L'intervallo $(0,1)$ non è numerabile.

Dim: Ogni $x \in (0,1)$ ammette un unico allineamento decimale, con cifre non definitivamente uguali a 9, del tipo

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots \quad , \quad a_i \in \{0,1,2,\dots,9\}$$

Se l'insieme $(0,1)$ fosse numerabile, tutti i suoi elementi si potrebbero mettere in successione $(x_1, x_2, \dots)$. Ciascuno di questi numeri ha un allinemento decimale

$$x_k = 0, a_{k1} a_{k2} a_{k3} \dots \quad , k \in \mathbb{N}^+$$

Costruiamo adesso un numero $b = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$ dove i "b_j" sono scelti nel modo seguente:

$$b_j = \begin{cases} 7 & \text{se } a_{jj} \leq 5 \\ 3 & \text{se } a_{jj} > 5 \end{cases}$$

Il numero b, costruito in questo modo, non coincide con nessuno degli x_k, ma certo è un elemento di $(0,1)$. Ma allora gli x_k non possono esaurire tutto l'intervallo $(0,1)$.

Un altro dimostrazione:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots a_{1n} \dots \\ x_2 &= 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots a_{2n} \dots \\ &\vdots \\ x_n &= 0, a_{n1} a_{n2} a_{n3} \dots a_{nn} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Consideriamo $b = 0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$ in modo tale che:

$$b_1 \neq a_{11}, \quad b_2 \neq a_{22}, \quad \dots \quad b_n \neq a_{nn}$$

$$b \neq x_1 ; \ b \neq x_2 \dots b \neq x_n$$

Quindi $b \notin \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ e $(0,1)$ non è numerabile. □

Da cui concludiamo che $\mathbb{R}$ non è numerabile.

A questo punto sappiamo che esistono due numeri cardinali dell'infinito. Ce ne sono altri?

Esistono insiemi con cardinalità maggiore dalla potenza del continuo, cioè, maggiore dalla cardinalità di $\mathbb{R}$?

La risposta è implicitamente contenuta nel seguente teorema:

Teorema di Cantor: Per ogni insieme A si ha $|A| < |\mathcal{P}(A)|$, dove $\mathcal{P}(A)$ indica l'insieme delle parti di A.

Dim: Esiste ovviamente una funzione $f: A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ iniettiva : basta considerare f in modo tale che associa ad $x \in A$ il sottoinsieme $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$.

Quindi
$$f: A \to \mathcal{P}(A)$$
$$x \mapsto \{x\}$$
, pertanto $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$.

Basta dunque dimostrare che $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$.

Supponiamo per assurdo che valga l'uguaglianza. Allora esiste una funzione biunivoca $g: A \to \mathcal{P}(A)$.

Consideriamo l'insieme $B = \{x \in A : x \notin g(x)\}$.

Ovviamente $B \in \mathcal{P}(A)$.

Per la suriettività di g, esiste $x_B \in A$ tale che $g(x_B) = B$

Evidentemente abbiamo due possibilità:

1. $x_B \in B$; per definizione di B allora $x_B \notin g(x_B) = B$, contraddizione;
2. $x_B \notin B$; per definizione di B allora $x_B \in g(x_B) = B$, contraddizione.

Abbiamo quindi un assurdo che dipende dall'ipotesi che g sia suriettiva.

Concludiamo che g non è biunivoca, quindi $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$.

$\square$

Osservazione: La cardinalità di $\mathbb{R}$ è la cardinalità dell'insieme delle parti di $\mathbb{N}$.

Possiamo scrivere che
$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$$
$$|\mathbb{R}| < |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$$

L'ipotesi del continuo:

Non esiste alcun insieme con cardinalità strettamente compresa tra quella di $\mathbb{N}$ e quella di $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

MODULO 5 _ Successioni

(1) Definizioni ed Esempi

Una succesione numerica è una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni numero naturale n, un numero reale, indicato con a_n.

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto a_n$$

Per indicare una successione, useremo la notazione $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Una successione $\{a_n\}$ si dice:

- limitata inferiormente: se esiste un numero L tale che $a_n \geq L$, $\forall n$.
- limitata superiormente: se esiste un numero M tale che $a_n \leq M$, $\forall n$.
- limitata: se esistono due numeri L e M tali che $L \leq a_n \leq M$, $\forall n$.

Per esempio, la successione $\{(-1)^n\}$ è limitata; $\{n^2\}$ è limitata inferiormente; $\{(-2)^n\}$ non è limitata; $\{\frac{1}{n}\}$ è limitata.

Def: Una successione $\{a_n\}$ possiede definitivamente una certa proprietà se esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che a_n soddisfa quella proprietà per ogni intero $n \geq N$.

Successione monotona:

Una successione $\{a_n\}$ é crescente se $a_n \leq a_{n+1}$; é strettamente crescente se $a_n < a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Una successione $\{a_n\}$ é decrescente se $a_n \geq a_{n+1}$; é strettamente decrescente se $a_n > a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Una successione $\{a_n\}$ é monotona se soddisfa una delle precedenti proprietà.

Esempi: $\{n^2\} = \{1, 4, 9, \dots\}$ è monotona strettamente crescente.

$\{\frac{1}{n}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ è " " decrescente.

$\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ non è monotona.

$\{\ln(n)\} = \{0, \ln 2, \ln 3, \dots\}$ è monotona st. crescente.

Segno di una successione:

Una succesione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ si dice positiva se $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (strettamente positiva se $a_n > 0$); si dice negativa se $a_n \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (strettamente negativa se $a_n < 0$.

Successioni convergenti:

Def: Una successione $\{a_n\}$ si dice convergente ad un numero reale L (si chiama limite della successione) e si scrive $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero N tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n \geq N$.

Si noti che $|a_n - L| < \varepsilon$ corrisponde a: $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$.

($\lim a_n = L$ si dice a_n tende L per n tendente a infinito).

Esempi: 1) Mostriamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n-1} = 1$

Possiamo scrivere $\underbrace{1-\varepsilon < \frac{n+1}{n-1}}_{\text{sempre soddisfatta perchè } \frac{n+1}{n-1} > 1} < 1+\varepsilon$

$n+1 < (n-1)(1+\varepsilon)$
$\cancel{n}+1 < \cancel{n}+n\varepsilon-1-\varepsilon$
$n\varepsilon > 2+\varepsilon \Rightarrow n > \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}$

Quella di destra è soddisfatta per $n > \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}$

Fissato $\varepsilon > 0$, basterà scegliere $N = \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}$ per soddisfare la condizione richiesta dalla definizione di limite.

2) Per mostrare che $2^{1/n} \to 1$ per $n \to \infty$, studiamo le disuguaglianze

$\underbrace{1-\varepsilon < 2^{1/n}}_{\text{sempre soddisfatta}} < 1+\varepsilon$

$2^{1/n} < 1+\varepsilon$
$\log_2 2^{1/n} < \log_2(1+\varepsilon)$
$\frac{1}{n} < \log_2(1+\varepsilon) \Rightarrow n > \frac{1}{\log_2(1+\varepsilon)}$

Quella di destra è soddisfatta per:

Quindi si sceglie $N = \frac{1}{\log_2(1+\varepsilon)}$

Successioni divergenti

Def: Una successione $\{a_n\}$ diverge positivamente se, per ogni numero reale $M > 0$ esiste un intero $N > 0$ tale che $a_n > M$ per ogni $n > N$.

Si scrive $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N > 0$ tale che $a_n > M, \forall n > N$.

Invece $\{a_n\}$ diverge negativamente:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N > 0 \text{ tale che } a_n < -M, \forall n > N.$$

Esempio: Dimostrare che $\lim_{n\to\infty} n^2+2n = +\infty$

Partendo dalla disequazione $n^2+2n > M$

$n^2+2n-M > 0 \Rightarrow n < -1-\sqrt{1+M} \quad \vee \quad n > -1+\sqrt{1+M}$

$\left(n_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4(-M)}}{2} = -1 \pm \sqrt{1+M}\right)$

È sufficiente scegliere $N = -1+\sqrt{1+M}$.

Infinitesimi e infiniti

Una successione a_n tendente a zero si dice <u>infinitesima</u>.

Ad esempio: $\{\frac{1}{n}\} \to 0$, $\{\frac{1}{n^2}\} \to 0$

"Infinitesimo" è una quantità variabile che diviene indefinitamente piccola.

Analogamente, una successione a_n tendente a $\pm\infty$ si dice <u>infinita</u>.

Ad esempio: $\{n^2\}$, $\{n!\}$ sono infiniti.

Def: Una successione che non è convergente o divergente, cioè, non ammette limite si dice <u>irregolare</u>

Def: Si dice che la successione $\{a_n\}$ tende a $L \in \mathbb{R}$ per eccesso e si scrive

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L^+ \quad \text{oppure} \quad a_n \to L^+ \ \text{per } n\to\infty \quad ;$$

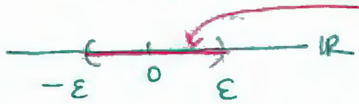
si dice $\{a_n\}$ tende a $L\in\mathbb{R}$ per difetto e si scrive

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L^- \quad \text{oppure} \quad a_n \to L^- \ \text{per } n\to\infty$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che $0 \le a_n - L < \varepsilon$ definitivamente e

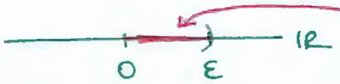
se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che $0 \le L - a_n < \varepsilon$ " , rispettivamente.

Ad esempio: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ $\qquad a_1, a_2, \dots, a_{N(\varepsilon)}, \boxed{a_{N+1}, \dots}$



$|a_n| < \varepsilon$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0^+$ $\qquad a_1, a_2, \dots, a_N, \boxed{a_{N+1}, \dots}$



$0 \le a_n < \varepsilon$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0^-$ $\qquad a_1, a_2, \dots, a_N, \boxed{a_{N+1}, \dots}$

$0 \le -a_n < \varepsilon$

Se un successione $\{a_n\} \longrightarrow +\infty \Rightarrow$ non è limitata superiormente

$\{a_n\} \longrightarrow -\infty \Rightarrow$ non è limitata inferiormente

Esempi: 1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0^+$ $\qquad \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$ $\quad 0 \leftarrow 1$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1^-$ $\qquad \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right)$ $\quad \frac{1}{2} \to 1$

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ $\qquad \left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$

tende a zero

ma non si può affermare né che $a_n \to 0^+$ né che $a_n \to 0^-$.

Teorema (Algebra dei Limiti): Se $a_n \to a$ e $b_n \to b$ allora

$a_n \pm b_n \to a \pm b$

$a_n b_n \to ab$

$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ $\quad (b_n, b \ne 0)$

$a_n^{b_n} \to a^b$ $\quad (a_n, a > 0)$

Teorema (Del Confronto): 1) Se $a_n \le b_n \le c_n$ definitivamente e $a_n \to L$, $c_n \to L \in \mathbb{R}$ allora anche $b_n \to L$.

Esempio: $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n}$

Sappiamo che $-\frac{1}{n} \le \frac{\sin(n)}{n} \le \frac{1}{n}$, con $-\frac{1}{n} \to 0$ e $\frac{1}{n} \to 0$. OK

Allora $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$

Dim. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora definitivamente abbiamo

$L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$; $L-\varepsilon < c_n < L+\varepsilon$

da cui segue (definitivamente)

$L-\varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < L+\varepsilon$ e quindi, definitivamente,

$L-\varepsilon < b_n < L+\varepsilon$

Dunque $b_n \to L$. □

2) Se $|a_n| \le b_n$ definitivamente e $b_n \to 0$ allora anche $a_n \to 0$
se $b_n \to 0$ e a_n è limitata allora $a_n b_n \to 0$
se $a_n \to \infty$ allora anche $b_n \to \infty$

Limiti che si presentano nella forma di rapporto di due espressioni, ognuna costituita dalla somma di potenze di n:

$$\frac{n^{5/2} - 3n + 7}{n^3 + \sqrt{n} - 3n^2}$$

Si mette in evidenza a numeratore come a denominatore la potenza maggiore:

$$= \frac{n^{5/2}\left(1 - \frac{3}{n^{3/2}} + \frac{7}{n^{5/2}}\right)}{n^3\left(1 + \frac{1}{n^{5/2}} - \frac{3}{n}\right)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1 - \frac{3}{n^{3/2}} + \frac{7}{n^{5/2}}}{1 + \frac{1}{n^{5/2}} - \frac{3}{n}}\right)$$

Ora per il teorema sull'algebra dei limiti e sapendo che potenze negative di n tendono a zero, possiamo affermare che:

$$1 - \underbrace{\frac{3}{n^{3/2}}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{7}{n^{5/2}}}_{\to 0} \to 1 \quad ; \quad 1 + \underbrace{\frac{1}{n^{5/2}}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{3}{n}}_{\to 0} \to 1$$

Pertanto la successione tra parentesi tende a 1; però $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, perciò la successione di partenza tende a zero.

Consideriamo ora il caso in cui i limiti sono $+\infty$ o $-\infty$.

Le regole per il limite della somma (o differenza) (di due succ. delle quali una o entrambe sono divergenti):

$a + \infty = +\infty$
$a - \infty = -\infty$
$+\infty + \infty = +\infty$
$-\infty - \infty = -\infty$

$\infty \cdot \infty = \infty$
$-\infty \cdot \infty = -\infty$
$\frac{\infty}{0} = \infty$; $\frac{-\infty}{0} = -\infty$
$\infty^{\infty} = \infty$; $\infty^{-\infty} = 0$

Analogamente le regole per il prodotto (o il rapporto):

$a \cdot \infty = \infty$ (se $a>0$)
$a \cdot \infty = -\infty$ (se $a<0$)
$a/\infty = 0^+$ $(a>0)$
$a/\infty = 0^-$ $(a<0)$
$\frac{a}{0} = \infty$

Esplicitamente, se $a_n \to a > 0$ e $b_n \to 0^+$, allora $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$
se $a<0$ o $b_n \to 0^-$, allora $a_n/b_n \to -\infty$

Forme di Indecisione

L'espressioni seguenti si chiamano forme di indecisione, poiché nessuna regola può essere stabilita a priori per determinare il risultato:

$$+\infty-\infty \ , \ 0\cdot\infty \ , \ \frac{0}{0} \ , \ \frac{\infty}{\infty} \ , \ 1^{\pm\infty} \ , \ 0^0 \ , \ (+\infty)^0$$

Teorema: La successione

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{è convergente.} \qquad \left(\text{presenta una forma di indecisione } 1^\infty\right)$$

Il numero e:

Introduciamo ora un numero definito come limite di una particolare successione, cioé,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (\text{numero di Nepero}, e \sim 2.7\ldots)$$

Teorema: Sia $\{a_n\}$ una qualsiasi successione divergente (a $+\infty$ o $-\infty$). Allora esiste

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e \qquad \left[\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k \\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{b_n} = e^{b_n/a_n} \end{array}\right]$$

Esempio: 1) Calcoliamo

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3+n}\right)^{5n+1}$$

Si tratta di una forma di indecisione 1^∞. Scriviamo:

$$\left(\frac{n}{3+n}\right)^{5n+1} = \frac{1}{\left(\frac{n+3}{n}\right)^{5n+1}} = \frac{1}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^{5n+1}} = \frac{1}{\left[\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n/3}\right]^{\frac{3}{n}(5n+1)}} = \frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right]^{b_n}}$$

$$\left(\frac{3}{n} = \frac{1}{a_n} \Rightarrow a_n = \frac{n}{3}\right) \qquad \text{con } a_n = \frac{n}{3}$$

Per il teorema precedente, la successione entro parentesi quadre tende ad "e", mentre l'esponente $b_n = \frac{3(5n+1)}{n} = \frac{15n+3}{n} \longrightarrow 15$ perciò il limite cercato è $1/e^{15}$.

2) Provare che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{(-n)}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \quad \text{dove } a_n = -n$$

Per il teorema, abbiamo $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} \longrightarrow e$.

Alcune Proprietà di limite

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni con

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad e \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

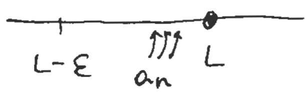
Possiamo scrivere:

1) $\lim a_n < \lim b_n \Rightarrow a_n < b_n$ definitivamente ($\exists N \in \mathbb{N}$ t.c. é soddisfatta questa proprietà $\forall n \geq N$.)
2) $\lim a_n < b \Rightarrow a_n < b$ definitivamente
3) $\lim a_n > b \Rightarrow a_n > b$ "
4) $a_n \underset{<}{\leq} b_n$ definitivamente $\Rightarrow a \underset{<}{\leq} b$

Corollario: Sia $\{a_n\}$ una successione monotona crescente. Allora esiste

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$ (Vuol dire che una succ. mon. cr. converge o diverge, non può essere irregolare)

Dim: Se $\{a_n\}$ è superiormente limitata, allora converge e il suo limite è uguale all'estremo superiore dei suoi valori, che in questo caso è un numero reale.



se $\{a_n\}$ sup. lim $\Rightarrow a_n \to L = \sup$

Se invece $\{a_n\}$ è superiormente illimitata, questo significa che $\forall K > 0$, $\exists n_0$ t.c. $a_{n_0} > K$. Sappiamo che $\{a_n\}$ é crescente, perciò $\forall n \geq n_0$ abbiamo $a_n \geq a_{n_0} > K$. Abbiamo quindi provato che per ogni $K > 0$ è $a_n > K$ definitivamente. Questo significa che $a_n \to +\infty$.

Teorema (Criterio Del Rapporto)

Sia a_n una successione positiva ($a_n > 0, \forall n$). Se esiste

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

e se $L < 1$, allora $a_n \to 0$

se $L > 1$, allora $a_n \to +\infty$

Esercizi

1) $a_n = \sqrt{n^2+1}$, $b_n = -n$, $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = ?$

$n \to \infty$; $a_n \to \infty$, $b_n \to -\infty$ $[\infty - \infty]$ indecisione

$$a_n + b_n = \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{\cancel{n^2}+1 - \cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} \xrightarrow{1/\infty} 0$$

* Considerare sole le potenze di grado massimo

2) a) $a_n = \frac{1}{n^2+1}$, $b_n = \frac{n^4-1}{n}$, $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = ?$

$n \to \infty$; $a_n \to 0$, $b_n \to \infty$ $[0 \cdot \infty]$ ind.

$$a_n \cdot b_n = \frac{1}{n^2+1} \cdot \frac{n^4-1}{n} = \frac{n^4-1}{n^3+n} = \frac{n^{\cancel{4}}\left(1 - \frac{1}{n^4}\right)}{\cancel{n^3}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} \to \infty$$

se invece $b_n = \frac{n^4-1}{-n}$, allora

$a_n \cdot b_n = \frac{n^4-1}{-n^3-n} \to -\infty$

oppure se la potenza di grado massimo di denom. > quella di num. $\Rightarrow$ conv. a ∞

$a_n b_n \sim \frac{n^4}{\;} \to \infty$

b) $a_n = \frac{1}{n^2+1}$, $b_n = \frac{2n^3+1}{n}$, $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = ?$

$a_n \to 0$, $b_n \to \infty$ $[0.\infty]$

$$a_n \cdot b_n = \frac{1}{n^2+1} \cdot \frac{2n^3+1}{n} = \frac{2n^3+1}{n^3+n} \to 2 \quad \text{oppure} \quad a_n \cdot b_n = \frac{\cancel{n^3}(2+\frac{1}{n^3})}{\cancel{n^3}(1+\frac{1}{n^2})} \to 2$$

c) $a_n = \frac{1}{n^2+1}$, $b_n = \frac{n^2-1}{n}$, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ?$

$a_n \to 0$, $b_n \to \infty$ $[0.\infty]$

$$a_n \cdot b_n = \frac{1}{n^2+1} \cdot \frac{n^2-1}{n} = \frac{n^2-1}{n^3+n} = \frac{\cancel{n^2}(1-\frac{1}{n^2})}{n^{\cancel{3}}(1+\frac{1}{n^2})} \to 0 \qquad \text{oppure } a_n \cdot b_n \sim \frac{n^2}{n^3} \to 0$$

3) Dimostrare che $\lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$ per ogni $b>0$.

Applichiamo il criterio del rapporto alla successione $a_n = \frac{b^n}{n!}$. Abbiamo:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b^{n+1}}{\underbrace{(n+1)!}_{(n+1).\cancel{n!}}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{b^n} = \frac{b}{n+1} \to 0 < 1$$

Per il criterio del rapporto allora $a_n = \frac{b^n}{n!} \to 0$

4) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+4n+1}{5(n+1)^3}$ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+4n+1}{5n^3+\ldots} \to \frac{2}{5}$$

5) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+n}{2^{n+1}}$ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n}\left(1+\frac{n}{2^n}\right)}{2.\cancel{2^n}} \to \frac{1}{2}$$

denum. tende all'infinito più rapidamente dal num. $\to 0$ allora

6) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ $[\infty^0]$

$$\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = e^{\ln n^{1/n}} = e^{\frac{\ln n}{n}}$$

Usando il teorema del confronto.

$$\ln n = \ln n^{2.\frac{1}{2}} = 2\ln\sqrt{n} \leq 2\sqrt{n} \Rightarrow \ln n \leq 2n^{1/2}$$

Per n sufficientemente grande abbiamo $1 \leq \ln n$, quindi possiamo scrivere:

$$\frac{1}{n} \leq \frac{\ln n}{n} \leq \frac{2n^{1/2}}{n} \to 0$$, allora $\frac{\ln n}{n} \to 0$. Dunque $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\ln n}{n}} \to 1$

$0 \leftarrow$

7) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(2e^n+1)}{n}\right)=?$$ ($\nearrow a_n$, $\searrow b_n$)

$$a_n=\ln\left[2e^n\left(1+\frac{1}{2e^n}\right)\right]=\ln 2+\underbrace{\ln e^n}_{n}+\underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{2e^n}\right)}_{\to 0}\sim n$$

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{n}{n}=1$$

8) $$\lim\left(\frac{\log_2(e^n-1)}{n+\sin(n)}\right)$$ ($\nearrow a_n$, $\to b_n$)

$$a_n=\log_2(e^n-1)=\frac{\ln(e^n-1)}{\ln 2}=\frac{\ln\left[e^n\left(1-\frac{1}{e^n}\right)\right]}{\ln 2}=\frac{\ln e^n+\ln\left(1-\frac{1}{e^n}\right)}{\ln 2}\sim\frac{n}{\ln 2}$$

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{n}{n\ln 2+\sin(n)\cdot\ln 2}\to\frac{1}{\ln 2}$$

9) Dimostrare che $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+5}=2$ mediante la definizione.

$\forall\varepsilon>0,\ \exists N(\varepsilon)$ tale che $\forall n>N$, $\left|\frac{2n+1}{n+5}-2\right|<\varepsilon$.

$$\underbrace{2-\varepsilon<\frac{2n+1}{n+5}}_{1^\circ}\ \overbrace{\frac{2n+1}{n+5}<2+\varepsilon}^{2^\circ}$$

1°) $\cancel{2n}+10-\varepsilon n-5\varepsilon<\cancel{2n}+1$

$\varepsilon n>9-5\varepsilon$

$n>\frac{9-5\varepsilon}{\varepsilon}$

Quindi si sceglie $\boxed{N=\frac{9-5\varepsilon}{\varepsilon}}$

2°) $\cancel{2n}+1<\cancel{2n}+10+\varepsilon n+5\varepsilon$

$\varepsilon n>-9-5\varepsilon$

$n>\underbrace{\frac{-9-5\varepsilon}{\varepsilon}}_{<0}$ sempre soddisfatto

10) Dimostrare che $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2-n}=-\infty$ mediante la definizione.

$\forall M>0,\ \exists N(M)>0$ tale che $\forall n>N\Rightarrow\frac{n^2+1}{2-n}<-M$

$n^2+1>-M(2-n)$ si cambia il segno perchè $2-n<0$ per $n>2$.

$n^2+1>-2M+Mn$

$n^2-Mn+(1+2M)>0$

$$n_{1,2}=\frac{M\pm\sqrt{M^2-4(1+2M)}}{2}\ \begin{matrix}\nearrow n_1\\ \searrow n_2\end{matrix}$$ $\Delta>0$ per M abbastanza grande

~~$n<n_2$~~ $n>n_1$, quindi basta scegliere $N=[n_1]$

Successione geometrica: Consideriamo la successione $\{q^n\}$, cioé,
$$1, q, q^2, q^3, \dots, q^n, \dots \quad , q \in \mathbb{R}$$

Abbiamo:
$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & \text{se } q>1 \\ 1 & \text{se } q=1 \\ 0 & \text{se } |q|<1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q\leq -1 \end{cases}$$

Teorema: In generale, si ha:
La successione $\{a^n\}$ é convergente se $-1<a\leq 1$ mentre é divergente se $a>1$,
In particolare:
$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & \text{se } a>1 \\ 1 & \text{se } a=1 \\ 0 & \text{se } -1<a<1 \\ \text{non esiste} & \text{se } a\leq -1 \end{cases}$$

Confronti e stime asintotiche

Quando due successioni sono entrambe infinitesimi (che tendono a 0) o entrambe infiniti (che divergono a $+\infty$, a $-\infty$), è utile poter stabilire un confronto tra di esse, per capire quale delle due tenda "più rapidamente" a 0 o all'infinito.

Esempi di infiniti sono le successioni seguenti: $\{\log n\}, \{\sqrt{n}\}, \{n^2\}, \{2^n\}$
Esempi di infinitesimi si ottengono dalle successioni precedenti considerando gli elementi reciproci.

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due infiniti. Consideriamo il limite del rapporto a_n/b_n.
Nel caso $\frac{a_n}{b_n} \to 1$, si dice a_n è asintotica a b_n, e si scrive $a_n \sim b_n$.
(o $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono asintotiche)

Esempio: $\sin a_n \sim a_n$, $e^{a_n} - 1 \sim a_n$
$\log(1+a_n) \sim a_n$

Confronto tra infiniti

Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ due successioni divergenti, cioé,
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad , \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$

Si dice che a_n diverge più rapidamente rispetto a b_n se e solo se:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$
o equivalentenente se: $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$

Esempi 1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{e^n} = 0$ perché e^n diverge più rapidamente rispetto a n^α
(limite notevole)
Usiamo la notazione $\{e^n\} >> \{n^\alpha\}$

2) Dimostrare che $\{\ln(2^{n^2})\} >> \{n\}$ trovando $\lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\ln(2^{n^2})}^{a_n}}{\underbrace{n}_{b_n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \ln(2)}{n} = \lim_{n\to\infty} n \cdot \ln(2) \to \infty$$, allora $a_n >> b_n$.

Confronto tra infinitesimi

Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ due successioni tali che:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

Si dice che a_n converge a zero più rapidamente rispetto a b_n se e solo se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \quad \text{o equivalentemente} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty$$

Esempi: 1) $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \lim_{n\to\infty} n \to \infty$$, quindi $\frac{1}{n^2} \to 0$ più rapid. rispetto a $\frac{1}{n}$.

2) $a_n = \frac{1}{n!}$, $b_n = \frac{1}{e^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n!} = 0$$ (limite notevole)

Limiti Fondamentali di Successioni

- $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
- $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1 \quad \forall a > 0$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$; $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \log_a(n) = \begin{cases} -\infty & \text{se } 0<a<1 \\ +\infty & \text{se } a>1 \end{cases}$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{n^n} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$; $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{e^n} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & \text{se } a>1 \\ 1 & \text{se } a=1 \\ 0 & \text{se } -1<a<1 \\ \nexists & \text{se } a \le -1 \end{cases}$

Limiti Notevoli Di Successioni

Se $\{a_n\}$ è una successione infinitesima, cioè, se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ allora valgono i seguenti limiti

- $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1$; $\lim_{n\to\infty} \frac{\arcsin(a_n)}{a_n} =$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a(1+a_n)}{a_n} = \frac{1}{\ln(a)} \quad \forall a>0, a \neq 1$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos(a_n)}{(a_n)^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\tan(a_n)}{a_n} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{a_n}-1}{a_n} = \ln(\alpha) , \forall \alpha > 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{(1+a_n)^\alpha - 1}{a_n} = \alpha , \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Esercizi 1 $\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(e^{\frac{1}{n^2\cdot\sin\left(\frac{1}{2n}\right)}}-1\right)$

L.N $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin a_n}{a_n}=1$ dove $a_n=\frac{1}{2n}\to 0$, quindi $\sin\frac{1}{2n}\sim\frac{1}{2n}$

$$e^{\frac{1}{n^2\cdot\sin\left(\frac{1}{2n}\right)}}=e^{\frac{1}{\cancel{n^2}\cdot\frac{1}{2\cancel{n}}}}=e^{2/n}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(e^{2/n}-1\right)$$

L.N. $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{a_n}-1}{a_n}=1$ dove $a_n=2/n\to 0$, quindi $e^{2/n}-1\sim 2/n$

$$\lim_{n\to\infty}\cancel{n}\cdot\frac{2}{\cancel{n}}=2$$

2 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2-1}{3n^5-5n^4+2n^2-3n-1}\right)^{n^3}$

$$\frac{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{3n^5-5n^4+2n^2-3n-1}\sim\frac{n^2}{3n^5}=\frac{1}{3n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n^3}\right)^{\frac{3n^3}{3}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3n^3}\right)^{3n^3}\right]^{1/3}=e^{1/3}$$

Sappiamo che $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$

3 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}-n)\cdot\tan\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$

L.N. $\lim_{n\to\infty}\frac{\tan(a_n)}{a_n}=1$ dove $a_n=\frac{n+1}{n^2}\to 0$, quindi $\tan\left(\frac{n+1}{n^2}\right)\sim\frac{n+1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}-n)\cdot\frac{n+1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2+n^{3/2}+n^{1/2}-n}{n^2}=-1$$

4 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{n+3}{n}\right)}{n\left(e^{1/n^2}-1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)}{n\left(e^{1/n^2}-1\right)}$

L.N. $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1$ dove $a_n=3/n\to 0$, quindi $\ln(1+3/n)\sim\frac{3}{n}$

L.N $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{a_n}-1}{a_n}=1$ dove $a_n=\frac{1}{n^2}\to 0$, quindi $e^{1/n^2}-1\sim 1/n^2$

Perciò, $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}}{\cancel{A}\cdot\frac{1}{n^2}} = 3$

⑤ $\lim_{n\to\infty} \frac{(1-e^{1/n})(1-\cos(1/n))\cdot n^3}{\sin^2(1/n)}$

<u>Primo modo</u>:

$\sin^2(1/n) = 1-\cos^2(1/n) = (1-\cos(1/n))(1+\cos(1/n))$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1-e^{1/n})\, n^3}{1+\cos(1/n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-e^{1/n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^3 (1+\cos(\frac{1}{n}))}$$

Adesso poniamo che sia $t = 1/n$ e sostituiamo nel limite:

se $n\to\infty$, allora $t\to 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{-(e^t-1)}{t^3(1+\cos t)}$$

L.N. $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$ dove $a_n = t = 1/n \to 0$, quindi $e^t-1 \sim t$

$$\lim_{t\to 0} \frac{-t}{t^3(1+\cos t)} = \lim_{t\to 0} \frac{-1}{\underbrace{t^2}_{0}\underbrace{(1+\underbrace{\cos t}_{1})}_{2}} \to 0 = -\infty$$

Secondo modo: $\lim_{n\to\infty} \frac{(1-e^{1/n})(1-\cos(1/n))}{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}[\sin(1/n)]^2}$

L.N $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$ dove $a_n = 1/n \to 0$; quindi $e^{1/n}-1 \sim \frac{1}{n} \Rightarrow 1-e^{1/n} \sim -\frac{1}{n}$

L.N $\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos(a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}$ dove $a_n = \frac{1}{n} \to 0$; quindi $\frac{1-\cos(1/n)}{1/n^2} \to \frac{1}{2}$

L.N $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$ dove $a_n = \frac{1}{n} \to 0$; quindi $\sin 1/n \sim 1/n$ allora $\left(\sin\frac{1}{n}\right)^2 \sim \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\cancel{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{2}}{\cancel{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2}{2} = -\infty$$

Alcune stime asintotiche: Sia $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ allora:

1) $\sin(a_n) \sim a_n$
2) $1-\cos(a_n) \sim \frac{a_n^2}{2}$
3) $\tan(a_n) \sim a_n$
4) $e^{a_n}-1 \sim a_n$
5) $\ln(1+a_n) \sim a_n$
6) $\arcsin(a_n) \sim a_n$
7) $\arctan(a_n) \sim a_n$
8) $\alpha^{a_n}-1 \sim \ln(\alpha)\cdot a_n \quad \forall \alpha>0$
9) $(1+a_n)^{\alpha}-1 \sim \alpha\cdot a_n \quad \forall \alpha\in\mathbb{R}$