Successione di Cauchy

Def: Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. Si dice che $\{a_n\}$ é una successione di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero $N > 0$ tale che per ogni coppia di numeri interi positivi $n, m \geq N$ si ha che $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Si scrive $\{a_n\}$ é di Cauchy $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : \forall n, m \geq N$ si ha $|a_n - a_m| < \varepsilon$.
(o più brevemente: $\forall \varepsilon > 0, |a_n - a_m| < \varepsilon$ definitivamente)

In sostanza, la condizione afferma che i termini della successione sono <u>sempre più vicini tra loro</u>. Si confronti con la definizione di successione convergente, che richiede invece che i termini della successione siano <u>sempre più vicini ad un certo numero reale L</u>. È naturale pensare che una successione convergente soddisfi la condizione di Cauchy.

Teorema: (i) Se una successione è convergente, allora è di Cauchy.
(ii) Se una successione è di Cauchy, allora è limitata.

Dim (i) Per ipotesi sappiamo che $\{a_n\}$ è convergente e chiamiamo il suo limite L, per definizione:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \text{ si ha } |a_n - L| < \varepsilon/2$$

Partiamo ora dalla differenza:

$$|a_n - a_m| = |a_n - L + L - a_m| \quad \text{(abbiamo aggiunto e sottratto } L\text{)}$$

Utilizziamo la disuguaglianza triangolare:

$$|a_n - L + L - a_m| \leq |a_n - L| + |a_m - L| \qquad (|L - a_m| = |a_m - L|)$$

Ora per $n, m \geq N$ abbiamo che:

$$|a_n - L| < \varepsilon/2$$
$$|a_m - L| < \varepsilon/2$$

pertanto

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - L| + |a_m - L| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

cioé

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \qquad \square$$

(ii) Per ipotesi sappiamo che $\{a_n\}$ è di Cauchy, allora per definizione abbiamo:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N \text{ si ha che } |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

In particolare per $\varepsilon = 1$ esiste $N_1 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n, m \geq N_1$ si ha che

$$|a_n - a_m| < 1$$

Per la disuguaglianza triangolare inversa abbiamo che

$$|a_n| - |a_m| \leq |a_n - a_m| < 1 \quad \forall n, m \geq N_1$$

Prendendo $m = N_1 + 1$ la precedente diventa:

$$|a_n| - |a_m| < 1, \ \forall n \geq N_1 \quad \Rightarrow |a_n| < 1 + |a_{N_1+1}| \quad \forall n \geq N_1$$

A questo punto definiamo

$$M = \max(|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots, |a_{N_1+1}| + 1|)$$

Quindi possiamo affermare che

$$|a_n| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N} \qquad \square$$

Definizione (succ. estratta): Data una successione $\{a_n\}$ di numeri reali, chiamiamo sottosuccessione (succ. estratta) di $\{a_n\}$ ogni successione estratta da questa, ossia ogni successione del tipo $\{a_{n_k}\}$ dove $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ è una successione crescente di indici interi.

Ad esempio, dalla successione $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ potremmo estrarre le sottosuccessioni $a_2, a_4, a_6, \ldots$ oppure $a_1, a_3, a_5, \ldots$ o qualsiasi altra $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$.

Importante scegliere una succ. (strettamente crescente) di indici interi.

Si vede subito che se $\{a_n\}$ converge o diverge, allora ogni sottosuccessione estratta da $\{a_n\}$ tenderà allo stesso limite. Invece, in generale, dal fatto che una particolare sottosucc. $\{a_{n_k}\}$ tenda a un certo L, non possiamo dedurre che lo stesso valga per la succ. intera. Ad esempio, data la succ.

$$a_n = (-1)^n,$$

se estraiamo la sottosucc. $a_{2n} = (-1)^{2n} = 1$, otteniamo una succ. costante (e quindi convergente), mentre la succ. di partenza a_n è oscillante.

Teorema (Bolzano–Weierstrass): Ogni successione di numeri reali contenuta in un intervallo limitato $[a,b]$ possiede una succ. estratta convergente in $[a,b]$.

Teorema: Sia $\{a_n\}$ una succ. di numeri reali: se è di Cauchy, allora converge.

Dim: Per ipotesi, sappiamo che $\{a_n\}$ è di Cauchy, quindi è limitata, allora per il teorema di Bolzano–Weierstrass la succ. $\{a_n\}$ ammette una succ. estratta $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente.

Chiamiamo $L = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$.

Per definizione (di limite): $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che $|a_{n_k} - L| < \varepsilon$, $\forall k \geq N$.

Per definizione di successione di Cauchy: $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n,m \geq N_1 \text{ (In particolare, } |a_n - a_{n_k}| < \varepsilon \ . \ \forall n,k \geq N_1)$$

* Il nostro obiettivo è dimostrare che anche $\{a_n\}$ converge al limite L.

Consideriamo quindi:

$$|a_n - L| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - L| \quad \text{(aggiunto e sottratto } a_{n_k})$$

Utilizziamo la disuguaglianza triangolare:

$$|a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - L| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - L|$$

Ora per $n,k \geq \max(N, N_1)$

$$\underbrace{|a_n - a_{n_k}|}_{\substack{<\varepsilon \\ \text{Cauchy}}} + \underbrace{|a_{n_k} - L|}_{\substack{<\varepsilon \\ a_{n_k} \text{ conv.}}} < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Quindi abbiamo $|a_n - L| < 2\varepsilon$ $\square$

Osservazione: Il teorema precedente viene fortemente influenzato dallo spazio in cui vive la successione, cioé, l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, ad esempio, non vale nell'insieme dei razionali. Consideriamo ad esempio la successione:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Questa è una succ. di numeri razionali, che converge (in $\mathbb{R}$) al numero $e \in \mathbb{R}$, e conseguentemente è di Cauchy, ma non converge in $\mathbb{Q}$ perchè $e \notin \mathbb{Q}$, quindi il limite non appartiene all'insieme in cui vive la successione.

Dato che abbiamo dimostrato che $\{a_n\}$ (una succ. di num. reali) é di Cauchy $\overset{\text{sse}}{\Longleftrightarrow}$ convergente possiamo concludere che la condizione di Cauchy è non solo necessaria ma anche sufficiente per la convergenza.

Successioni definite per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = \ldots \\ a_{i+1} = f(a_i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = \ldots, \ a_2 = \ldots \\ a_{i+2} = f(a_i, a_{i+1}) \end{cases}$$

Teorema (di monotonia):

Sia $\{a_n\}$ é monotona crescente e sup. limitata allora esiste il limite e $\lim_{n\to\infty} a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Analogamente, se $\{a_n\}$ é monotona decrescente e inf. limitata, allora esiste il limite e $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Esempi: 1) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{i+1} = \dfrac{2a_i}{a_i+2} \end{cases}$

$$a_2 = \frac{2a_1}{a_1+2} = \frac{4}{4} = 1 \qquad \{2, 1, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{2}, \dots\}\ ;\ a_i > 0$$

$$a_3 = \frac{2a_2}{a_2+2} = \frac{2}{3}$$

$$a_4 = \frac{2a_3}{a_3+2} = \frac{4/3}{2/3+2} = 1/2$$

$\vdots$

$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{i+1} = \dfrac{2a_i}{a_i+2} \end{cases}$ $\forall i,\ a_i > 0$, se $a_i > 0$ allora $a_{i+1} = \dfrac{\overbrace{2a_i}^{>0}}{\underbrace{a_i+2}_{>0}} > 0$ inf. limitata

$$a_i - a_{i+1} = a_i - \frac{2a_i}{a_i+2} = \frac{a_i^2 + \cancel{2a_i} - \cancel{2a_i}}{a_i+2} > 0$$, allora $a_i > a_{i+1}\ \forall i$

monotona decrescente

Perciò esiste $L \geq 0$ tale che $a_n \to L$

$$L = \frac{2L}{L+2} \Rightarrow L^2 + \cancel{2L} = \cancel{2L} \Rightarrow L = 0\ ;\ a_n \to 0$$

2) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{i+1} = \frac{1}{2}a_i + 1 \end{cases}$

$$a_2 = \tfrac{1}{2}a_1 + 1 = 5/2 \qquad \{3, 5/2, 9/4, 17/8, \dots\}\ \ a_i > 2\ ?$$

$$a_3 = \tfrac{1}{2}a_2 + 1 = 9/4$$

$$a_4 = \tfrac{1}{2}a_3 + 1 = 17/8$$

se $a_i > 2$, $a_{i+1} = \underbrace{\tfrac{1}{2}\overbrace{a_i}^{>2}}_{>1} + 1 > 2$ inferiormente limitata

$$a_i - a_{i+1} = a_i - \left(\tfrac{1}{2}a_i + 1\right) = \overbrace{\tfrac{1}{2}\underbrace{a_i}_{>2}}^{>1} - 1 > 0$$, allora $a_i > a_{i+1}\ \forall i$

monotona decrescente

Quindi $\exists L$

$$L = \tfrac{1}{2} \cdot L + 1 \Rightarrow \tfrac{1}{2}L = 1 \Rightarrow L = 2\ ;\ a_n \to 2$$

3) Studiare il comportamento delle seguenti successioni definite per ricorrenza

a) $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{n}{2n+1} \cdot a_n$

Osserviamo che $\forall n,\ a_n > 0$

inoltre $a_{n+1} < a_n$ infatti per $\forall n$;

$$\underbrace{\left(\frac{n}{2n+1}\right)}_{<1/2} a_n < a_n$$

$\Rightarrow$ La successione è limitata e monotona

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = L$.

$L = \dfrac{n}{2n+1} \cdot L$ se solo se $L = 0$.

b) $a_1 = 1/2$, $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{n} \cdot a_n$

per $\forall n,\ a_n > 0$, vediamo se $a_{n+1} < a_n$

$\dfrac{n+1}{n} a_n < a_n$? NO, perchè $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Successione monotona crescente quindi ammette limite.

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n} \cdot a_n = \frac{n+1}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}}{n-1} a_{n-1} = \frac{n+1}{\cancel{n-1}} \cdot \frac{\cancel{n-1}}{n-2} \cdot a_{n-2}$$

$= \dots = \dfrac{n+1}{1} \cdot a_1 = (n+1)\dfrac{1}{2}$ quindi per $n \to \infty$

$a_{n+1} \to \infty$

MODULO 6 _ Serie Numeriche

Definizione di Serie

Data una successione di numeri reali $\{a_n\}$, chiamiamo serie dei termini a_n la scrittura

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

che si legge "serie (ma anche "somma") per n da 1 a ∞ di a_n". Per dare significato a questo simbolo, che intuitivamente rappresenta l'operazione di somma degli infiniti addendi a_n, costruiamo anzitutto un'altra successione, $\{s_n\}$, i cui termini sono così definiti:

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Il numero s_n viene detto somma parziale n-esima della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, e la successione $\{s_n\}$ si dice <u>successione delle somme parziali</u> della serie precedente. Una volta costruita tale successione $\{s_n\}$ si passa al limite per n che tende a $+\infty$, cioè si considera:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Quindi possiamo dire che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, divergente, irregolare se la succ. $\{s_n\}$ è convergente, divergente o irregolare, rispettivamente.

In particolare, se $\{s_n\}$ è convergente, $s_n \to s$, diremo che s è la somma della serie, e scriviamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

L'espressione "studiare il carattere della serie" significa stabilire se la serie è convergente o divergente, o irregolare.

Alcune Serie

Serie geometrica: Sia $a_n = r^{n-1}$, $r \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ si chiama serie geometrica

abbiamo $s_n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n$

$$s_n = \frac{(1+r+r^2+\ldots+r^n)(1-r)}{1-r} = \frac{1-r^n}{1-r}$$

se $|r|<1$, $r^n \to 0$ per $n\to\infty$.

Quindi abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \frac{1}{1-r}$$

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n\right)$ è $\begin{cases} \text{converge a } \dfrac{1}{1-r} & \text{se } |r|<1 \\ \text{diverge a } +\infty & \text{se } r\geq 1 \\ \text{irregolare} & \text{se } r\leq -1 \end{cases}$

Esempi: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ converge a $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ irregolare

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ converge a $\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$

Serie armonica: è la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$$

Questa serie tende a ∞ per $n\to\infty$

Serie di Mengoli: è la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

Osservando che $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$, quindi:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\dots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1}$$

Dunque per $n\to\infty$, $s_n\to 1$, cioè $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ converge a 1.

La serie di Mengoli è il più semplice esempio di serie telescopica, che significa: Il termine generale a_k ha la forma $b_k - b_{k+1}$ (b_k: un'altra succ.) e di conseguenza, grazie alle cancellazioni, abbiamo

$$s_n = b_1 - b_{n+1}$$

Se il termine $b_n\to 0$, la serie converge e ha somma b_1 (cioè, converge a b_1)

Esempi: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Dato che:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$, quindi succ. delle somme parziali è

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1.2} - \cancel{\frac{1}{2.3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2.3}} - \cancel{\frac{1}{3.4}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n(n+1)}} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

Dato che $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$, la succ. delle somme parziali é

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \dots \left(\cancel{\frac{1}{2n-1}} - \frac{1}{2n+1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$$

Criterio di Cauchy (Condizione necessaria di Cauchy per la convergenza di una serie)

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie. Condizione necessaria affinchè $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga è che la succ. del termine generale a_n sia infinitesima, cioè, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Come mostra l'esempio della serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, la condizione non è sufficiente. Comunque, se il termine generale non tende a zero, certamente la serie non converge. Ad esempio, $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ non converge, perchè $\cos\frac{1}{n} \to 1$.

(se $a_n \to 0$, $\sum a_n$ → conv. / → div.
se $a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum a_n$ non converge)

Criterio del confronto

Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie a termini non negativi e tali che $a_n \leq b_n$ definitivamente. Allora valgono le seguenti implicazioni:

i) $\sum b_n$ convergente $\Rightarrow \sum a_n$ convergente

ii) $\sum a_n$ divergente $\Rightarrow \sum b_n$ divergente

La serie $\sum b_n$ viene detta maggiorante, la $\sum a_n$ minorante.

Esempi 1) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, con $p \leq 1$ è divergente.

Per $p=1$, abbiamo $\sum \frac{1}{n}$ (serie armonica) $\rightarrow$ divergente

Per $p<1$, per il criterio del confronto; $\frac{1}{n} < \frac{1}{n^p}$ e $\sum \frac{1}{n}$ diverge quindi anche $\sum \frac{1}{n^p}$ diverge.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$

per il criterio del confronto: $\frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ una serie geometrica con $r = \frac{1}{2} < 1$ $\rightarrow$ convergente

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ converge

Criterio del confronto asintotico

Se le due successioni (a termini positivi) $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono asintotiche, $a_n \sim b_n$ allora le corrispondenti serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere, cioè o sono entrambe convergenti o sono entrambe divergenti.

Esempi: 1) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge perchè $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}$ e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (di Mengoli) converge.

2) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha \geq 2$ converge per il criterio del confronto:

$\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Abbiamo quindi stabilito il carattere della serie armonica generalizzata

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \begin{array}{ll} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \\ \text{diverge} & \text{se } \alpha \geqslant 1 \end{array}}$$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+\cos n}{3+2n^3}$

$$\frac{5n+\cos n}{3+2n^3} \sim \frac{5n}{2n^3} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

La costante é ininfluente sul carattere della serie

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, quindi anche $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+\cos n}{3+2n^3}$ converge!

Un'osservazione importante riguarda la differenza tra stabilire il carattere della serie e calcolare <u>la somma della serie</u> (nel caso converga). In generale, quando affermiamo in base al criterio del confronto asintotico che la serie $\sum a_n$ converge perchè la serie $\sum b_n$ converge, ciò <u>non significa</u> affatto che le due serie abbiano la stessa somma. Ad esempio,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \quad e \quad \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2} \quad \text{però} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Criterio della radice

Sia $\sum a_n$ una serie (a termini non negativi). Se esiste il limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$$

allora:

$$\sum a_n \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \ell < 1 \\ \text{diverge} & \text{se } \ell > 1 \\ \text{nulla si può concludere} & \text{se } \ell = 1 \end{cases}$$

Esempi 1) Sia data $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n}$ con $a \geq 0$, per $n\to\infty$, $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{n}\right)^n} = \frac{a}{n} \to 0$

e perciò la serie data converge.

2) Sia data $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$, per $n\to\infty$, $\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2}$

e perciò la serie data converge.

Criterio del rapporto

Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi. Se esiste il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

$$\sum a_n \begin{cases} \text{converge} & \text{se } L < 1 \\ \text{diverge} & \text{se } L > 1 \\ \text{nulla si può concludere} & \text{se } L = 1 \end{cases}$$

Esempi 1) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ è convergente. Infatti:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! = \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = \frac{1}{n+1} \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{3^n}\right)$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2+1}{3^{\cancel{n+1}}} \cdot \frac{\cancel{3^n}}{n^2+1} = \frac{n^2+2n+2}{3n^2+3}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+2}{3n^2+3} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ per il C.D.R. la serie converge

Serie Assolutamente Convergente

Def (serie a segno variabile): Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si dice a segno variabile se è formata da infiniti termini positivi e infiniti termini negativi.

Def (serie a segni alterni): Se una serie si presenta nella forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \text{con } a_n > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

allora parlaremo di serie a segni alterni.

Def: Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se converge la serie (a termini non negativi) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (la serie dei moduli associata alla serie $\sum a_n$)

Teorema 1 (Criterio di Convergenza Assoluta)**:** Se la serie $\sum a_k$ converge assolutamente, allora converge.

Osservazioni:

1) La convergenza assoluta implica la convergenza semplice; il viceversa non è vero.

2) Se la serie dei moduli (valori assoluti) non converge non possiamo dire nulla sulla serie di partenza, essa potrebbe divergere ma anche convergere semplicemente, come mostra il seguente esempio:

Determiniamo il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right)$; $\left|(-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$

$a_n = \frac{1}{n}$, sappiamo che $\sum a_n$ è una serie armonica che diverge positivamente.

pertanto la serie di partenza non converge assolutamente, ma per il momento non possiamo dire null'altro per la convergenza.

Teorema (Criterio di Leibniz): Sia data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n \quad \text{con } a_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se (i) la successione $\{a_n\}$ è decrescente;
(ii) $a_n \to 0$ per $n \to \infty$
$\Big\}$ allora la serie è convergente.

Abbiamo già detto che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ non converge assolutamente,

ma utilizzando il criterio di Leibniz; (i) $\frac{1}{n} \geq 0$

(ii) $\frac{1}{n}$ è decrescente

(iii) $\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to \infty$

quindi possiamo concludere che la serie di partenza è convergente.

Esercizi: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ (la serie dei valori assoluti è $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$, una serie armonica generalizzata con $\alpha = 1/2 < 1$ quindi diverge)

$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{n^{1/2}}$, per il criterio di Leibniz, (i) $a_n = \frac{1}{n^{1/2}} \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\frac{1}{n^{1/2}} \geq \frac{1}{(n+1)^{1/2}}$, allora $\{a_n\}$ è decrescente

(iii) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{1/2}} = 0$

Perciò la serie converge semplicemente.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \ln(n)}$

$\left| \frac{(-1)^n}{n^2 + \ln(n)} \right| = \frac{1}{n^2 + \ln(n)} \leq \frac{1}{n^2}$, per il criterio del confronto, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge quindi anche $\sum \frac{1}{n^2 + \ln(n)}$ converge, e concludiamo che la serie di partenza converge assolutamente.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2^n}$

$\left| \frac{(-1)^{2n}}{2^n} \right| = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge (serie geometrica con $r<1$), quindi la serie di partenza converge assolutamente.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100 \cos(n\pi)}{2n+3}$; $\cos(n\pi) = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100 (-1)^n}{2n+3}$

$$\left| \frac{100\,(-1)^n}{2n+3} \right| = \frac{100}{2n+3}$$

per il criterio del confronto asintotico, $\frac{100}{2n+3} \sim \frac{1}{2n}$

$\sum \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n}$ è una serie armonica, e sappiamo che è divergente.

Per il Criterio di Leibniz;

(i) $\frac{100}{2n+3} \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) $a_n \geq a_{n+1}$

$\frac{100}{2n+3} \geq \frac{100}{2n+5}$ decrescente

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{100}{2n+3} = 0$

Dunque, la serie di partenza converge semplicemente.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2-1)}{n^2+1}$

$\left| \frac{(-1)^n (n^2-1)}{n^2+1} \right| = \frac{n^2-1}{n^2+1}$, per il criterio di Cauchy, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1} = 1 \neq 0$

quindi $\sum \frac{n^2-1}{n^2+1}$ non converge

Non si può ne anche utilizzare il criterio di Leibniz dato che $\frac{n^2-1}{n^2+1} \not\to 0$ per $n \to \infty$, quindi si può concludere solamente che la serie di partenza <u>non</u> converge.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1+(-1)^n n^2}{n^3}$

Scriviamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

La prima serie converge perché $\frac{n+1}{n^3} \sim \frac{1}{n^2}$ e $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

La seconda serie converge per il criterio di Leibniz: (i) $\frac{1}{n} \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (iii) $\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to \infty$

(ii) $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$

Quindi la serie di partenza converge. Abbiamo qui usato un fatto generale:

se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, allora $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k+b_k)$ converge.

7) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n}\right]$$

Scriviamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^n}{n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

La prima serie converge per il criterio di Leibniz; la seconda diverge (serie armonica); quindi la serie di partenza diverge. Più in generale:

se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge, allora $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k+b_k)$ diverge.

8) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$$

$\left|\frac{(-1)^n}{\ln(n)}\right| = \frac{1}{\ln(n)}$, per il criterio del confronto, $\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(n)}$ e $\sum \frac{1}{n}$ diverge

quindi $\sum \frac{1}{\ln(n)}$ diverge. Dunque, la serie di partenza non converge assolutamente.

Per il criterio di Leibniz: (i) $\frac{1}{\ln(n)} \geq 0$ (ii) $a_n \geq a_{n+1}$

$\frac{1}{\ln(n)} \geq \frac{1}{\ln(n+1)} \Rightarrow$ decrescente

(iii) $\frac{1}{\ln(n)} \to 0$ per $n \to \infty$

Perciò la serie di partenza converge semplicemente.

9) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sin(\pi/n)}{n+1}$$

$\sin\frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi}{n} \sim \frac{1}{n}$

$\left|\frac{(-1)^n \cdot \sin(\pi/n)}{n+1}\right| = \frac{1}{n(n+1)}$ (Serie di Mengoli) $\to$ converge

Dunque, la serie di partenza converge assolutamente.

MODULO 7 – Funzioni

Definizioni e Richiami

Parliamo in particolare di funzioni reali a variabile reale, cioè le funzioni per cui l'insieme di definizione ed il codominio sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) \quad , \forall x \in A$$

La dipendenza di $f(x)$ da x si visualizza disegnando il grafico di f, ossia l'insieme dei punti del piano di coordinate (x,y) con $y=f(x)$, e x variabile nel dominio A.

La proprietà fondamentale che fa di f una funzione, ossia il fatto che ad ogni ingresso $x \in A$ faccia corrispondere una e una sola uscita $f(x) \in \mathbb{R}$, ha allora il seguente significato geometrico:

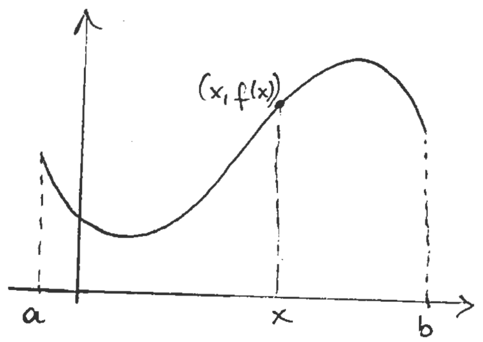

Grafico di una funzione di dominio $A=[a,b]$

$$G = \{ (x,y) : x \in A , y = f(x) \}$$

Grafico di una funzione (trasformazioni elementari sui grafici)

– $f(x)+k$: corrisponde a una traslazione in verticale di k unità del grafico di f; verso l'alto se $k>0$, verso il basso se $k<0$.

– $f(x+k)$: corrisponde a una traslazione in orizzontale di k unità del grafico di f; verso sinistra se $k>0$, verso destra se $k<0$

– $\alpha f(x)$: corrisponde a una contrazione o dilatazione in verticale del grafico di f, combinata se $\alpha<0$ con un completo ribaltamento del grafico di f rispetto all'asse delle ascisse, secondo il seguente schema:

$\alpha > 1$: dilatazione

$0<\alpha<1$: contrazione

$-1<\alpha<0$: contrazione e ribaltamento

$\alpha<-1$: dilatazione e ribaltamento

nel caso in cui $\alpha=-1$ sia unicamente il ribaltamento rispetto all'asse delle ascisse, senza dilatazione o contrazione.