— $f(\alpha . x)$: corrisponde a una contrazione o dilatazione <u>in orizzontale</u> del grafico di f, combinata se $\alpha<0$ con un completo ribaltamento del grafico di f rispetto all'asse delle ordinate, secondo il seguente schema:

$\alpha>1$: contrazione

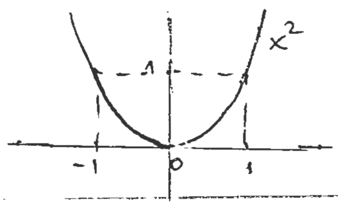
$0<\alpha<1$: dilatazione

$-1<\alpha<0$: dilatazione e ribaltamento

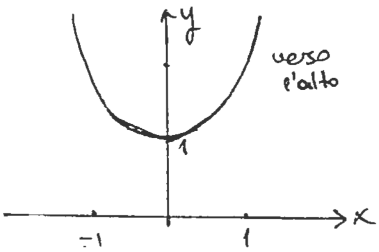
$\alpha<-1$: contrazione e ribaltamento

nel caso in cui $\alpha=-1$ si ha unicamente il ribaltamento rispetto all'asse delle ordinate, senza dilatazione o contrazione.

Ad esempio, il grafico di $f(x)=x^2$

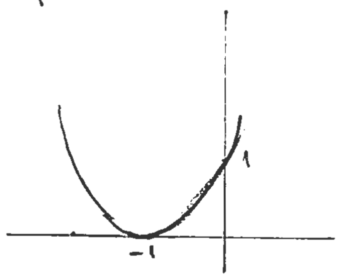


$f(x)+1 = x^2+1$



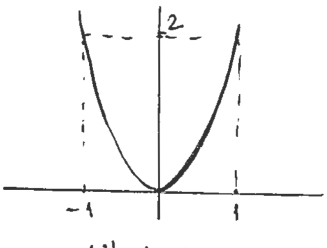
verso l'alto

$f(x+1)=(x+1)^2$



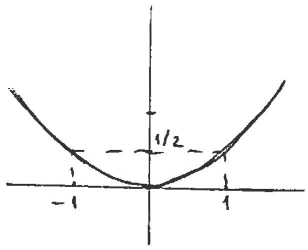
verso destra

$2f(x) = 2x^2$



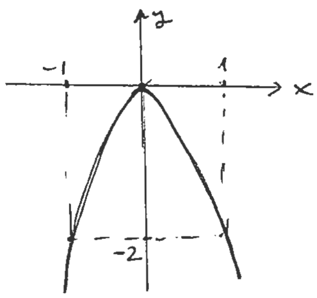
dilatazione

$\frac{1}{2}f(x) = \frac{x^2}{2}$



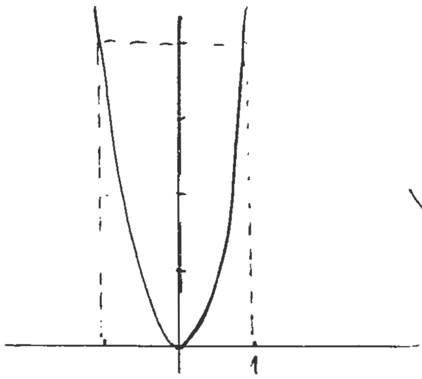
contrazione

$-2f(x) = -2x^2$



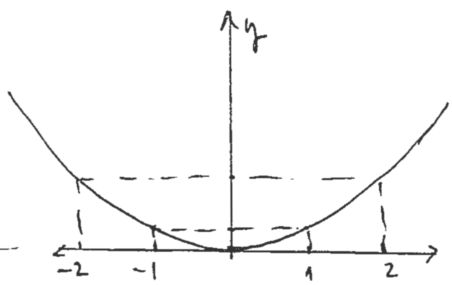
dilatazione e ribaltamento

$f(2x) = 4x^2 = f(-2x)$



contrazione

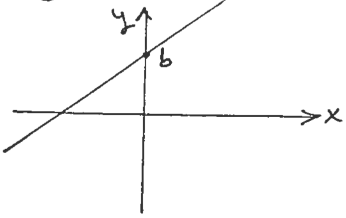
$f(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{4}x^2 = f(-\frac{1}{2}x)$



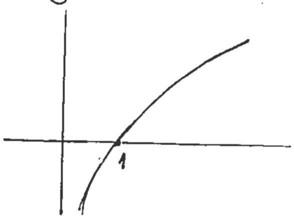
dilatazione

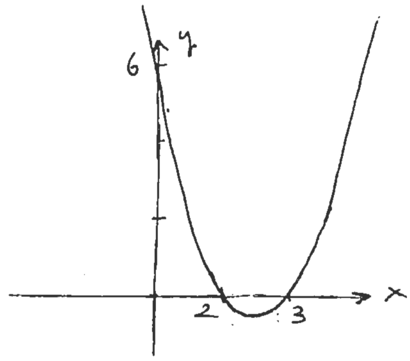
Alcune funzioni

$y = ax + b$



$y = \log_a x$



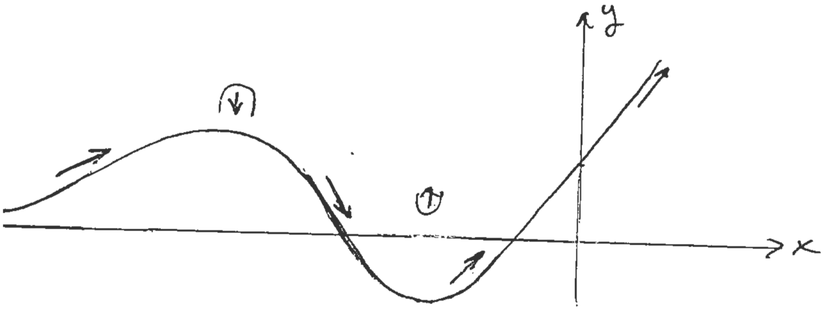


$y = x^2 - 5x + 6$

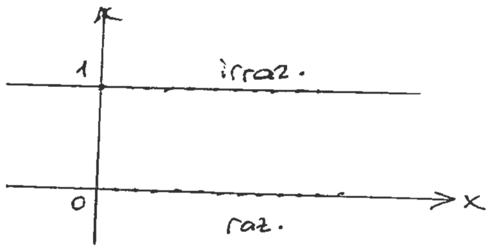
$x = 0 \Rightarrow y = 6$

$y = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$

$y = (x^2 + 2x)e^x$

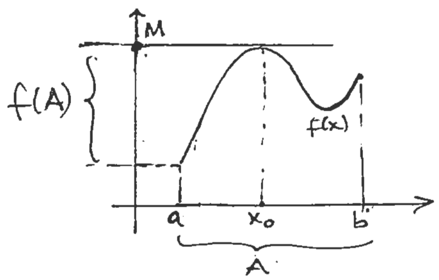


$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ razzionale} \\ 1 & \text{se } x \text{ irrazzionale} \end{cases}$$



Funzioni limitate

Se il grafico di una funzione $f: A \to B$ è contenuto nel semipiano inferiore delimitato da una retta parallela all'asse delle ascisse, per esempio di equazione $y = M$, la funzione si dice limitata superiormente. Si dice che M è massimo di f in $[a,b]$ e $x_0 \in [a,b]$ è punto di massimo se

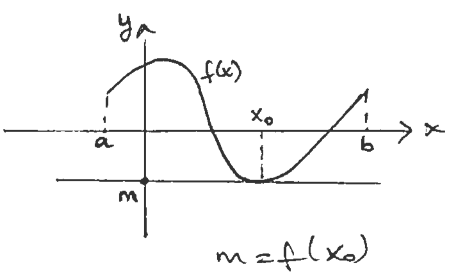


$f(x) \leq M \quad , \forall x \in A$

$M = f(x_0)$

Analogamente, f si dice limitata inferiormente se il suo grafico è contenuto nel semipiano superiore, e si dice che m è minimo di f e $x_0 \in [a,b]$ è punto di minimo

se $\quad f(x) \geq m \; , \; \forall x \in A$



$m = f(x_0)$

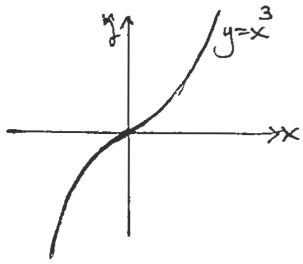
Una funzione si dice limitata se è limitata sia inferiormente che superiormente.

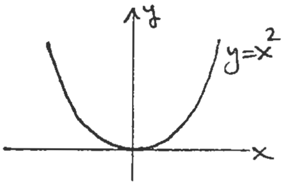
Per esempio:

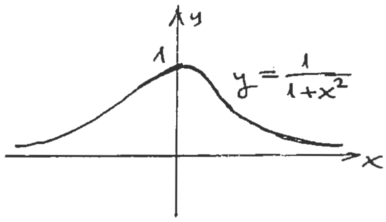
$x \longmapsto x^3$, $x \in \mathbb{R}$ non è limitata

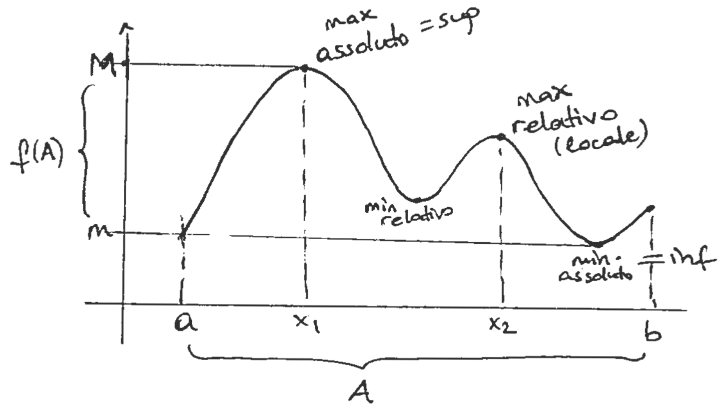
$x \longmapsto x^2$, $x \in \mathbb{R}$ è limitata inferiormente; infatti $x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ è limitata, poiché $0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$



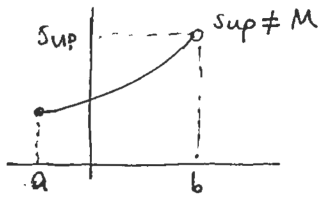




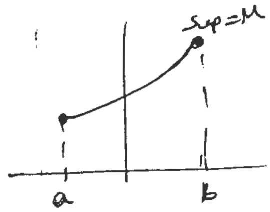


$f : A \to B$

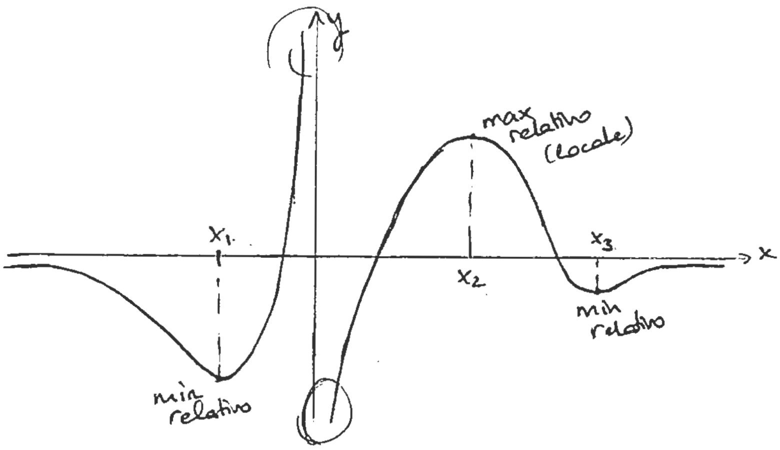
$y = f(x)$



$a \leq x < b$



$a \leq x \leq b$



$\sup = +\infty$ $\quad \nexists$ max, min

$\inf = -\infty$

Notiamo che 1) il minimo e massimo assoluto di f (se esistono) sono unici

2) massimi e minimi locali possono essere più di uno.

Simmetrie e Periodicità

Una funzione è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate se

$$f(-x) = f(x)$$

Una tale funzione si chiama <u>funzione pari</u>.

Ad esempio: • $f(x) = x^2$

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$, allora $f(x) = x^2$ una funzione pari

• $f(x) = \frac{x^3 - x}{2x}$, $f(-x) = \frac{-x^3 + x}{-2x} = \frac{-(x^3 - x)}{-2x} = \frac{x^3 - x}{2x} = f(x)$

anche questa funzione soddisfa la simmetria relativa all'asse y.

Altri esempi:

$y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = \ln(x^2 - |x| + 1)$ dove $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$y = e^{\cos(x)+1}$ sono funzioni pari

Una funzione è simmetrica rispetto all'origine (si chiama dispari) se

$$f(-x) = -f(x)$$

Ad esempio: • $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

$f(-x) = \frac{-x^3}{x^2-1} = -f(x)$, allora $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ è dispari.

• $f(x) = \sin(x) - x$

$f(-x) = \sin(-x) - (-x) = -\sin(x) + x = -(\sin(x) - x) = -f(x) \Rightarrow$ funz. dispari

Funzioni periodiche

La funzione $f: A \to B$ (non costante) è <u>periodica</u> di periodo T, $T > 0$, se T è il più piccolo numero reale positivo tale che

$$f(x+T) = f(x) \quad , \forall x \in A$$

Ogni intervallo di lunghezza T, contenuto in A, si chiama <u>intervallo di periodicità</u>.

Tipici esempi di funzioni periodiche sono le funzioni trigonometriche:

$x \longmapsto \sin(x)$ $(T = 2\pi)$

$x \longmapsto \cos(x)$ $(T = 2\pi)$

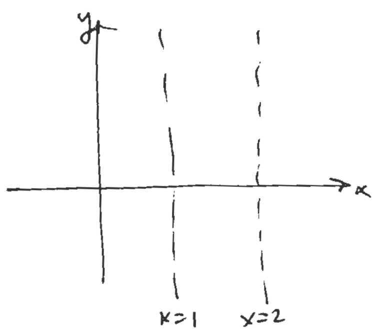
$x \longmapsto \tan(x)$ $(T = \pi)$

Insieme di definizione (Campo di esistenza)

– Razionali ed irrazionali

1) $y = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$ C.E $= \mathbb{R} - \{1,2\}$

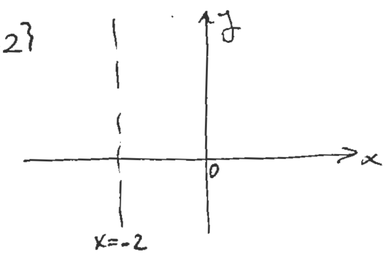
$D \neq 0$; $\underbrace{x^2-3x+2}_{(x-1)(x-2)} \neq 0 \Rightarrow x_{1,2} \neq \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$



2) $y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+2}}$ C.E: $\mathbb{R} - \{-2\}$

$D \neq 0 \Rightarrow x+2 \neq 0$

$x \neq -2$



3) $y = \dfrac{1-x}{x^2+3}$

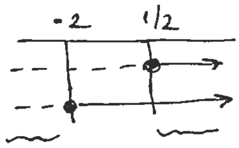
$D \neq 0 \Rightarrow x^2+3 \neq 0$

$x^2 \neq -3$ soddisfato sempre

Quindi C.E: $(-\infty, \infty)$

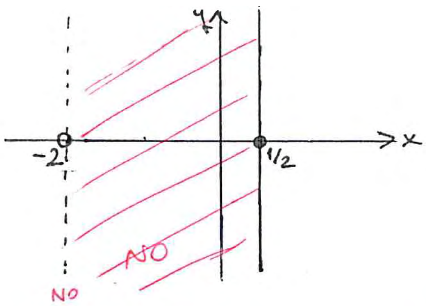
4) $y = \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}}$

$$\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x+2} \geq 0 \longrightarrow & 2x-1 \geq 0 \quad x+2 \geq 0 \\ & x \geq 1/2 \quad x \geq -2 \\ x+2 \neq 0 & \\ \hookrightarrow x \neq -2 & \end{cases}$$



$x \leq -2 \vee x \geq 1/2$

C.E: $(-\infty, -2) \cup [1/2, \infty)$



- Logaritmi ed Esponenziali

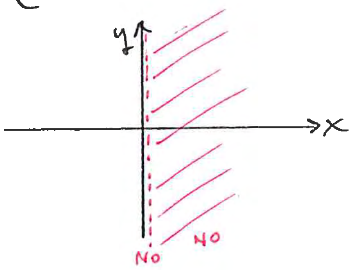
1) $y = \sqrt{\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)}$

$$\begin{cases} \ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right) \geq 0 \longrightarrow \boxed{\dfrac{x-1}{x} \geq 1} \\ \dfrac{x-1}{x} > 0 \quad \text{soddisfatto} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$\dfrac{x-1}{x} - 1 \geq 0 \Rightarrow \dfrac{\cancel{x}-1-\cancel{x}}{x} \geq 0$

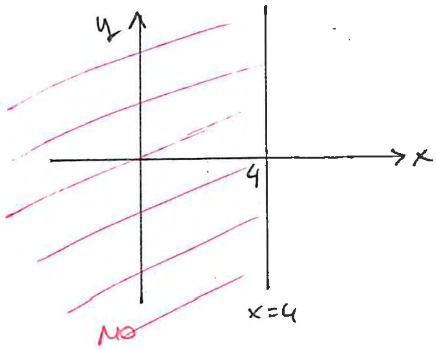
$-\dfrac{1}{x} \geq 0$

$x < 0$



2) $y = \log\left(\sqrt{x-3} + \sqrt{x-4}\right)$

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \\ x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \end{cases} > x \geq 4$$

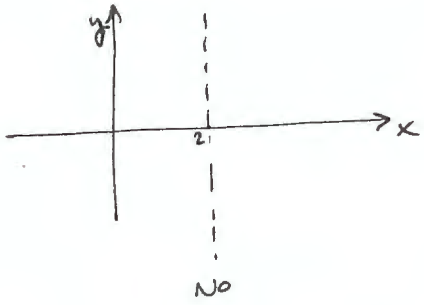


3) $y = e^{\frac{x}{x-2}}$

C.E : $x-2 \neq 0$

$x \neq 2$

$(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

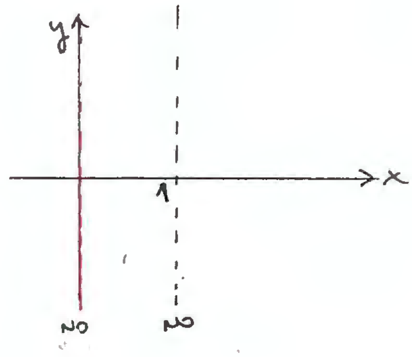


4) $y = \dfrac{x}{e - e^{1/x}}$

$$\begin{cases} e - e^{1/x} \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \longrightarrow \quad e^{1/x} \neq e$$

$1/x \neq 1$

$x \neq 1$

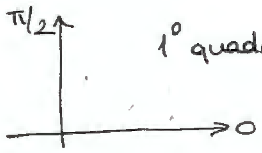


C.E : $\mathbb{R} - \{0, 1\}$

- Funzioni trigonometriche

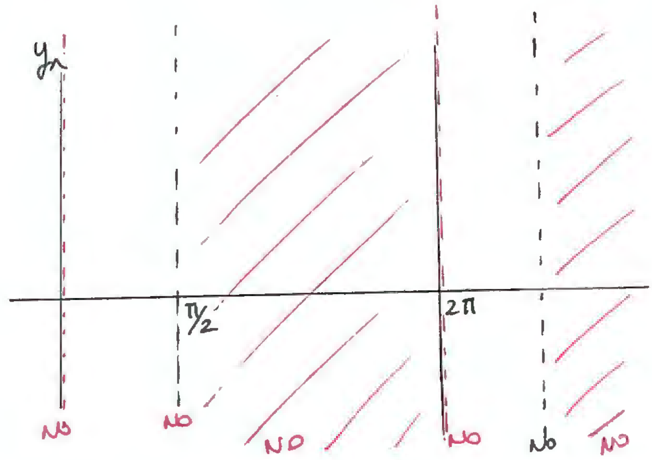
1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin x}} + \dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$ $\quad [0, 2\pi]$

$$\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$$



1° quadrante

C.E = $(0, \pi/2)$



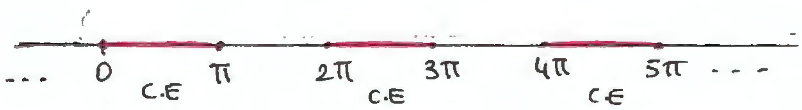
se non consideriamo $[0, 2\pi]$

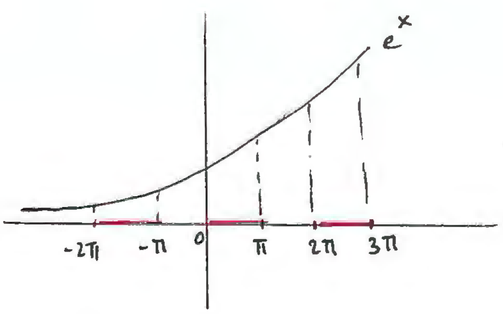
2) $y = \sqrt{\sin x} \cdot e^x$ $\quad [0, 2\pi]$

$\sin x \geq 0$

C.E : $[0, \pi]$

Se non consideriamo l'intervallo $[0, 2\pi]$, allora:

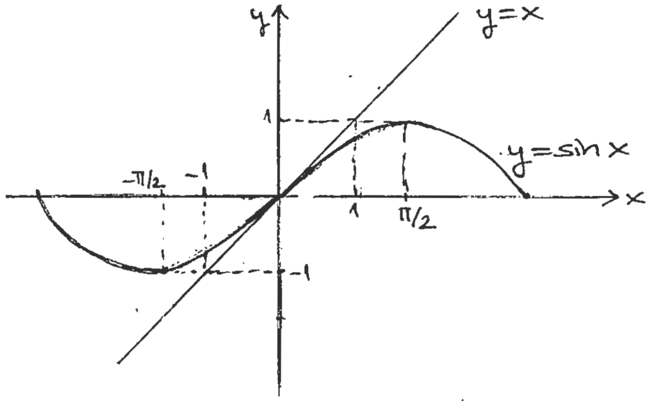




3) $y = \log(x - \sin(x))$

$x - \sin(x) > 0$

$x > \sin(x)$



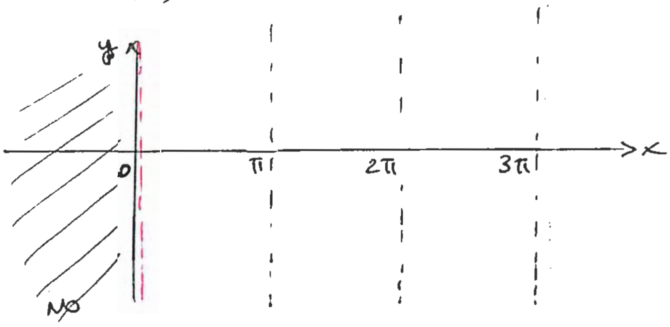
C.E: $(0, \infty)$

4) $y = \dfrac{x^{\sin x} + 1}{e^{\sin x} - 1}$; $x^{\sin x} = f(x)^{g(x)} \Rightarrow f(x) > 0 \, , \, x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x > 0 \\ e^{\sin x} - 1 \neq 0 \Rightarrow e^{\sin x} \neq 1 \end{cases}$$

$\sin x \neq 0 \, , \quad x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$

C.E: $(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi) \cup (2\pi, 3\pi) \cup \dots$



5) $y = \dfrac{\sin 2x}{\sin x + \cos x}$ $\quad [0, 2\pi]$

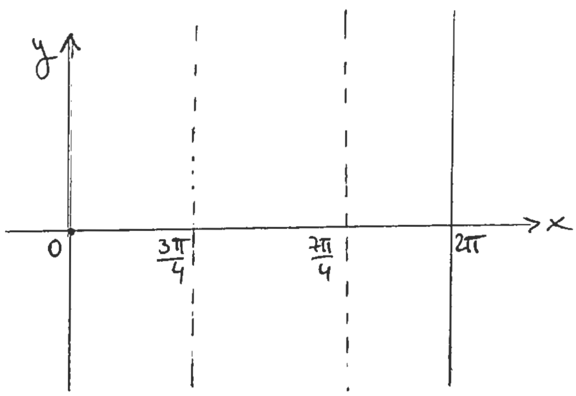
$\sin 2x$: periodica di periodo π

$\left.\begin{matrix}\sin x \\ \cos x\end{matrix}\right\}$ " " " 2π

$\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\cos x} \neq \dfrac{0}{\cos x}$

$\tan x + 1 \neq 0$

$\tan(x) \neq -1 \qquad x \neq \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

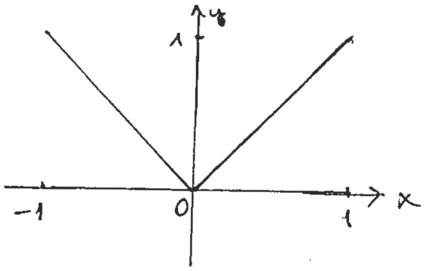


C.E: $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$

– Funzioni con modulo

$$y=f(x) \quad , \quad |f(x)| \begin{cases} f(x) & \text{dove } f(x)\geq 0 \\ -f(x) & \text{dove } f(x)<0 \end{cases}$$

Ad esempio; se $f(x)=|x|$



1) $y=\sqrt{x\cdot|x|+1}$ $\qquad |x| \begin{cases} x & \text{se } x\geq 0 \\ -x & \text{se } x<0 \end{cases}$

se $x\geq 0$

$y=\sqrt{x^2+1}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad \Big\}\ x\geq 0$, $[0,\infty)$

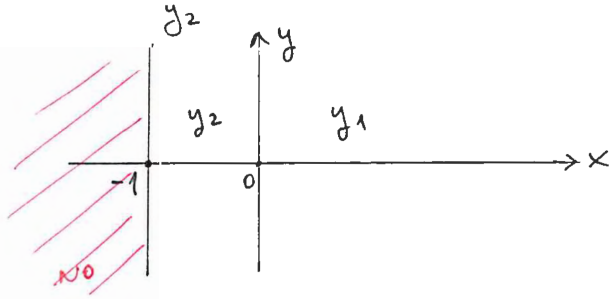
se $x<0$

$y=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow 1-x^2\geq 0$

$x^2\leq 1$

$-1\leq x\leq 1$ $\quad \Big\}\ -1\leq x<0$, $[-1,0)$

$$y=\begin{cases} \overset{y_1}{\sqrt{x^2+1}} & [0,\infty) \\ \underset{y_2}{\sqrt{1-x^2}} & [-1,0) \end{cases} \quad \text{C.E}: [0,\infty)\cup[-1,0)=[-1,\infty)$$



2) $y=\sqrt{\underbrace{|x-3|}-\underbrace{|x-4|}}$

$x\geq 3$, $x-3$ ... $\quad x\geq 4$, $x-4$

$x<3$, $3-x$ $\quad x<4$, $4-x$

$x<3 \quad y_1=\sqrt{3-x-(4-x)}=\sqrt{-1}$ NO!

$3\leq x<4 \quad y_2=\sqrt{x-3-(4-x)}=\sqrt{2x-7} \rightarrow 2x-7\geq 0$

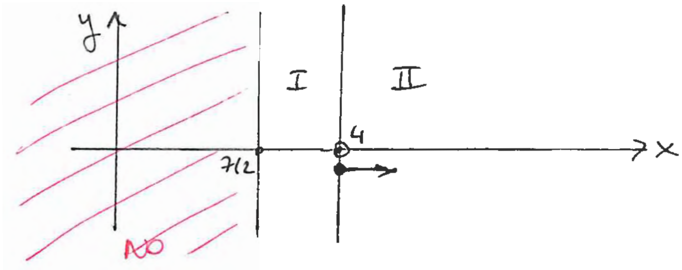
$x\geq 7/2$ $\quad \Big\}\ 7/2\leq x<4$

$[7/2,4)$

$x\geq 4 \quad y_3=\sqrt{x-3-(x-4)}=\sqrt{1}=1 \rightarrow [4,\infty)$

(I) $[7/2, 4)$

(II) $[4, \infty)$



C.E: $[7/2, \infty)$

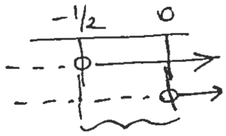
3) $\log_2 \left(\log_3 \frac{|x+1|}{|x|} \right)$

$\frac{|x+1|}{|x|} > 0$ soddisfatto sempre ; $|x| \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

$\log_3 \frac{|x+1|}{|x|} > 0 \Rightarrow \frac{|x+1|}{|x|} > 1$

$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{se } x < -1 \end{cases}$ $\qquad |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$x < -1$	$-1 \leq x < 0$	$x \geq 0$
$\frac{-(x+1)}{-x} = \frac{x+1}{x} > 1$	$\frac{x+1}{-x} > 1$	$\frac{x+1}{x} > 1$
$\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{x} > 0 \Rightarrow x > 0$	$\frac{x+1}{-x} - 1 > 0$	$x > 0$
NO!	$\frac{x+1+x}{-x} > 0 \Rightarrow -\left(\frac{2x+1}{x}\right) > 0$	
	$\Rightarrow \frac{2x+1}{x} < 0$	
	$2x+1>0 \Rightarrow x > -1/2$	
	$x > 0$	



$(-\frac{1}{2}, 0)$

C.E : $(-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \infty)$

4) $y = \ln(|x| - 2|x-1|)$

$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$, $|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{se } x < 1 \end{cases}$

		0		1	
$\lvert x \rvert$	$-x$		x		x
$\lvert x-1 \rvert$	$-(x-1)$		$-(x-1)$		$x-1$

$x < 0 \Rightarrow y_1 = \ln(-x + 2(x-1)) = \ln(x-2) \Rightarrow x-2>0 \Rightarrow x>2$ NO!

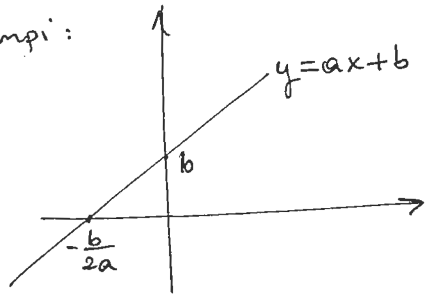
$0 \leq x < 1 \Rightarrow y_2 = \ln(x + 2(x-1)) = \ln(3x-2) \Rightarrow 3x-2>0 \Rightarrow x > 2/3$ $(\frac{2}{3}, 1)$

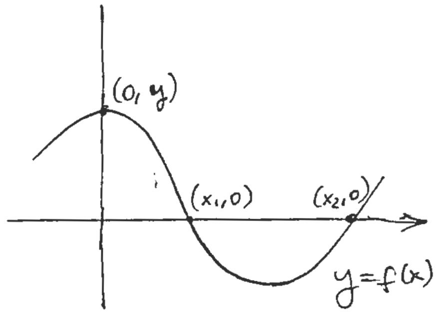
$x \geq 1 \Rightarrow y_3 = \ln(x - 2(x-1)) = \ln(2-x) \Rightarrow 2-x>0 \Rightarrow x<2$ $[1, 2)$

C.E : $(\frac{2}{3}, 1) \cup [1, 2) = (\frac{2}{3}, 2)$

Zeri e segno

Esempi:





1) $y = \dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$

C.E : $x^2-3x+2 \neq 0$

$(x-1)(x-2) \neq 0$

$x \neq 1\ ,\ x \neq 2$

- $y=0 \Rightarrow x+1=0$ $\qquad (-1,0)$

$x=-1$

- $x=0 \Rightarrow y=1/2$ $\qquad (0,1/2)$

2) $y=\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}}$

C.E : $x+2 \neq 0$

$x \neq -2$

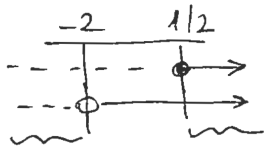
$\dfrac{2x-1}{x+2} \geq 0$

N : $2x-1 \geq 0$

$x \geq 1/2$

D : $x+2>0$

$x>-2$



$(-\infty,-2) \cup [1/2,\infty)$

- $y=0 \Rightarrow 2x-1=0$

$x=1/2$

- $x=0 \Rightarrow y=\sqrt{-\frac{1}{2}}$ NO!

infatti $x=0 \notin$ C.E.

3) $y=\sqrt{\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)}$

C.E $x \neq 0$

$\frac{x-1}{x}>0$

soddisfatto

$\log\left(\frac{x-1}{x}\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x} \geq 1$

$\frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}}{x} \geq 0 \Rightarrow -\frac{1}{x} \geq 0$

$\Rightarrow x<0$

C.E : $x<0$

- $y=0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)=0$

$\frac{x-1}{x}=1$

$\frac{x-1}{x}-1=0$

$\frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}}{x}=0$

$-\frac{1}{x}=0 \quad \nexists\, x$

- $x=0 \notin$ C.E

4) $y = e^{\frac{x}{x-2}}$

C.E $x \neq 2$; $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

- $y=0 \Rightarrow e^{\frac{x}{x-2}} = 0$ no soluzione

- $x=0 \Rightarrow e^0 = 1$

5) $y = \dfrac{\sin 2x}{\sin x + \cos x}$ $[0, 2\pi)$

C.E : $[0, 2\pi] - \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$

- $y=0 \Rightarrow \sin(2x) = 0$

$2 \sin x \cos x = 0$ $\begin{cases} \sin x = 0 & \text{per } x = 0, \pi \\ \cos x = 0 & \text{per } x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

- $x=0 \Rightarrow y = \dfrac{\sin 0}{\sin 0 + \cos 0} = \dfrac{0}{1} = 0$

6) $y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin x}} + \dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$ C.E: $(0, \frac{\pi}{2})$

$\nexists$ intersezione con l'asse x perchè $y>$

$\nexists$ " con l'asse y perchè

$x=0 \notin$ C.E

6) $y = \log_2 \left(\log_3 \dfrac{|x+1|}{|x|} \right)$

C.E : $(-\frac{1}{2}, 0)$

- $y=0 \Rightarrow \log_3 \dfrac{|x+1|}{|x|} = 1$

$\dfrac{|x+1|}{|x|} = 3 \Rightarrow |x+1| = 3|x|$

	-1		0
$\|x\|$:	$-x$	$-x$	x
$\|x+1\|$:	$-(x+1)$	$x+1$	$x+1$

$x < -1 \Rightarrow -(x+1) = -3x$

$x+1 = 3x \Rightarrow x = 1/2 \notin$ C.E.

$-1 \leq x < 0 \Rightarrow x+1 = -3x$

$4x = -1$

$\boxed{x = -1/4}$

$\begin{matrix} x > 0 \\ x \neq 0 \end{matrix} \Rightarrow x+1 = 3x$

$2x = 1 \Rightarrow x = 1/2 \notin$ C.E.

- $x=0 \notin$ C.E.

7) $y = \sqrt{|x-3| - |x-4|}$

C.E : $[7/2, \infty)$

	3		4
$\|x-3\|$	$-(x-3)$	$x-3$	$x-3$
$\|x-4\|$	$-(x-4)$	$-(x-4)$	$x-4$

- $y=0 \Rightarrow |x-3| = |x-4|$

$x<3 \Rightarrow -(x-3) = -(x-4)$

$\cancel{x}-3 = \cancel{x}-4$ NO!

$3 \leq x < 4 \Rightarrow x-3 = -(x-4)$

$x-3 = -x+4 \Rightarrow 2x = 7$

$\boxed{x = 7/2}$

$x \geq 4 \Rightarrow \cancel{x}-3 = \cancel{x}-4$ NO!

- $x=0 \Rightarrow \sqrt{|-3| - |-4|} = \cancel{\sqrt{-1}}$

NO!

8) $y=\log_2\left(\log_3 \dfrac{|x+1|}{|x|}\right)$ $\quad C.E=\left(-\frac{1}{2},0\right)$

		-1		0	
$\lvert x+1\rvert$	$-(x+1)$	ϕ	$x+1$		$x+1$
$\lvert x\rvert$	$-x$		$-x$	ϕ	x

– $y=0 \Rightarrow \log_3\dfrac{|x+1|}{|x|}=1$

$$\frac{|x+1|}{|x|}=3$$

$$|x+1|=3|x|$$

$x<-1 \Rightarrow -(x+1)=-3x$

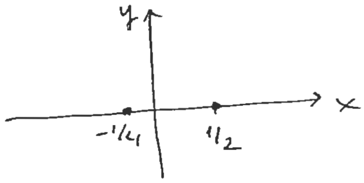
$$x+1=3x$$
$$2x=1$$
$$x=1/2 \not< -1 \quad \text{No!}$$

$-1\leq x<0 \Rightarrow x+1=-3x$

$$4x=-1$$
$$\boxed{x=-1/4}$$

$x>0 \Rightarrow x+1=3x$

$$2x=1$$
$$\boxed{x=1/2}$$



Interseca l'asse x in due punti

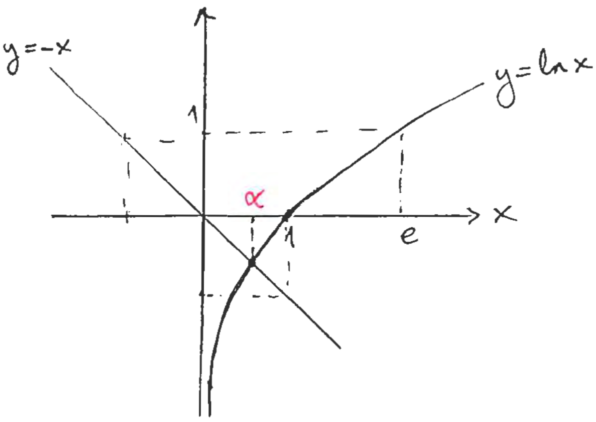
– $x=0 \notin C.E$

Valori approssimati

1) $y=\ln x+x$ $\quad C.E: x>0$

– $y=0$ $\quad \ln x=-x$

$$x=e^{-x}$$



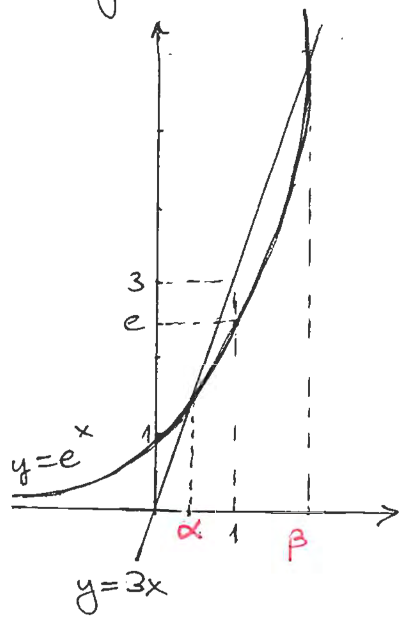
$y=0 \Rightarrow x=\alpha$

dove $\underline{0<\alpha<1}$

– $x=0 \notin C.E.$

2) $y = e^x - 3x$ C.E: $\forall x \in \mathbb{R}$

- $y=0 \Rightarrow e^x = 3x$



due punti di intersezione:

$x=\alpha$, $x=\beta$

$0<\alpha<1$, $\beta>1$

- $x=0 \Rightarrow y = e^0 = 1$

Segno

1) $y=\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}}$ C.E: $x \neq -2$

2) $y = \sqrt{\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)}$ C.E: $x<0$

$y \geq 0$ nel C.E.

3) $y = e^{\frac{x}{x-2}}$ C.E: $x \neq 2$

4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin(x)}} + \dfrac{1}{\sqrt{\cos(x)}}$ C.E: $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

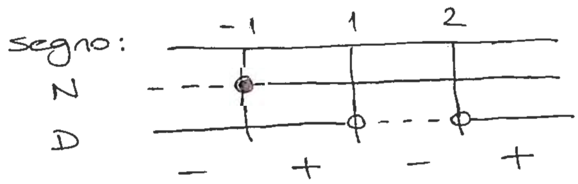
$y>0$ nel C.E.

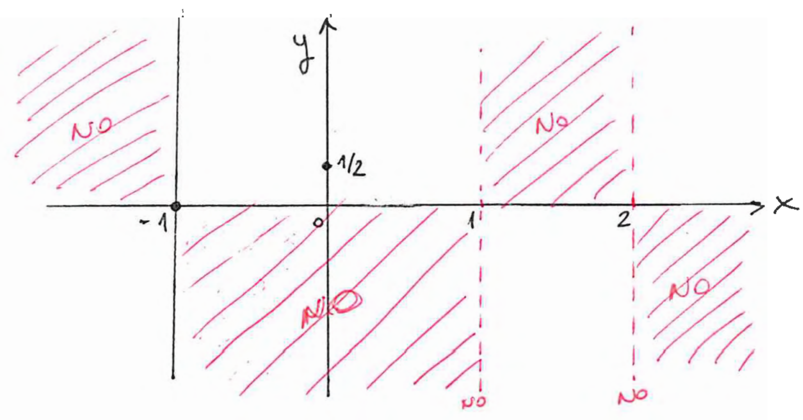
5) $y = \dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$ C.E: $x \neq 1$, $x \neq 2$

$y=0 \Rightarrow x=-1$

$x=0 \Rightarrow y = 1/2$

N: $x+1 \geq 0$
$x \geq -1$





6) $y = \dfrac{x}{e - e^{1/x}}$ C.E : $x \neq 0$, $x \neq 1$

$D_1: \; e - e^{1/x} > 0$ $N_1: \; x > 0$

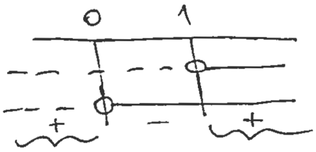
$e > e^{1/x}$

$1 > \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{1-x}{x} < 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x} > 0$

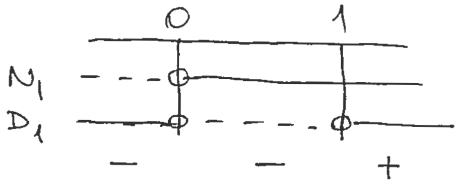
$N_2: \; x - 1 > 0$

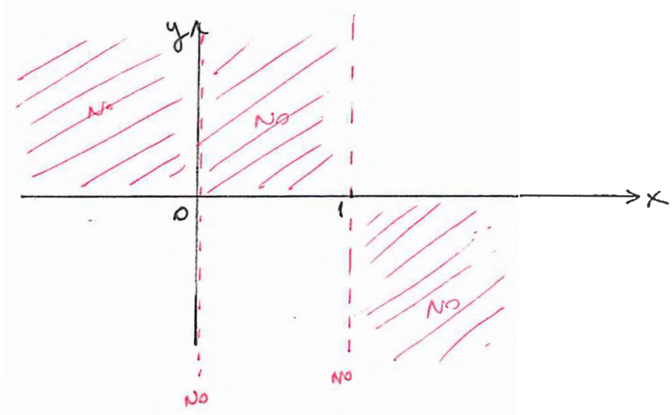
$x > 1$

$D_2: \; x > 0$



$D_1 > 0: \; x < 0 \;\; \vee \;\; x > 1$





MODULO 8 – LIMITI DI FUNZIONI

Definizione

Consideriamo un intervallo I, un punto $x_0 \in I$ e una funzione f a valori reali, definita in I, salvo al più nel punto x_0. L'intervallo I può essere limitato o illimitato, chiuso o aperto; il punto x_0 può essere interno all'intervallo oppure uno dei suoi estremi (eventualmente $+\infty$ o $-\infty$).

Prendiamo ora una qualunque successione di punti x_n $(n=1,2,\dots)$, nell'intervallo I e diversi da x_0, che tenda a x_0, per $n \to +\infty$. In corrispondenza alla successione di ingressi x_n, consideriamo la successione delle uscite $f(x_n)$.

Se, qualunque sia la successione scelta, si ha che $f(x_n)$ tende al limite L (finito o infinito) si dice che <u>il limite di $f(x)$</u> per x che tende a x_0 é L, e si scrive :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \text{oppure} \quad f(x) \to L \ \text{per} \ x \to x_0 .$$

("Il limite, per x tendente a x_0, di $f(x)$ è L" oppure "$f(x)$ tende a L per x tendente a x_0")

Nella scrittura $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ parleremo di

$$\text{limite} \begin{cases} \text{finito} \\ \text{infinito} \end{cases} \text{se} \begin{cases} L \in \mathbb{R} \\ L = +\infty, \ L = -\infty \end{cases}$$

e parleremo di

$$\text{limite} \begin{cases} \text{al finito} \\ \text{all'infinito} \end{cases} \text{se} \begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_0 = +\infty, \ x_0 = -\infty \end{cases}$$

1) Definizione di limite finito per x tendente a un valore finito

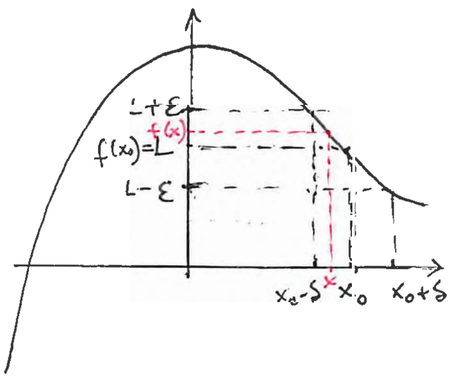
Consideriamo una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ e un punto x_0.
Si ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ se solo se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un numero $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che ogni volta che prendiamo

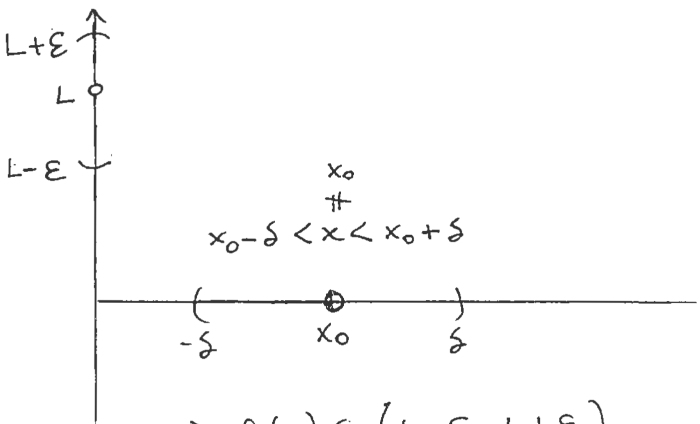
$$|x - x_0| < \delta \quad (\text{ovvero} \ \ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta), \ \forall x \in C.E. \ \text{e} \ x \neq x_0,$$

risulta che $|f(x) - L| < \varepsilon$ (ovvero $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$).

In simboli:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \text{tale che} \ |f(x) - L| < \varepsilon \ \text{se} \ |x - x_0| < \delta, \ \forall x \in C.E \ \text{e} \ x \neq x_0}$$





$$\Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

Esempio: Verificare che

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

Scegliamo un valore $\varepsilon>0$, $\exists\, \delta(\varepsilon)>0$ che soddisfa $|x-\overset{x_0}{\overset{\shortparallel}{1}}|<\delta$?

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x^2-1-2x+2}{x-1}\right|<\varepsilon$$

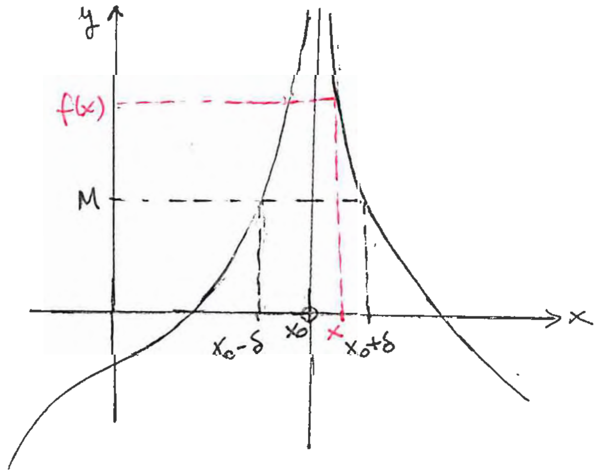
$$\left|\frac{x^2-2x+1}{x-1}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-1}}\right|<\varepsilon \Rightarrow |x-1|<\varepsilon$$

ovvero, $1-\varepsilon<x<1+\varepsilon$

Quindi basta prendere $\delta=\varepsilon$

2) Definizione di limite infinito per x tendente a un valore finito

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\ \exists\, \delta(M)>0 \text{ tale che se si considera } |x-x_0|<\delta,\ \forall x\in C.E \text{ e } x\neq x_0, \text{ allora } f(x)>M.}$$



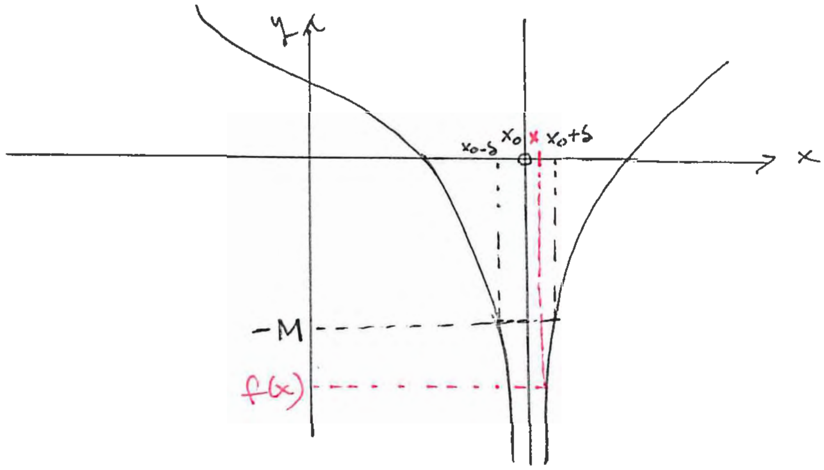
Esempio: Verificare che $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$

$\forall M>0$, $\exists\, \delta(M)>0$ che soddisfa $|x-\overset{x_0}{\overset{\shortparallel}{0}}|<\delta$, cioè $|x|<\delta$?

$$f(x)>M \Rightarrow \frac{1}{x^2}>M \Rightarrow x^2<\frac{1}{M} \Rightarrow -\sqrt{\frac{1}{M}}<x<\frac{1}{\sqrt{M}}$$

$\Rightarrow |x|<\frac{1}{\sqrt{M}}$, quindi il valore $\delta(M)$ cercato è $\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$.

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall M>0,\ \exists\, \delta(M)>0 \text{ tale che se si considera } |x-x_0|<\delta,\ \forall x\in C.E \text{ e } x\neq x_0, \text{ allora } f(x)<-M.}$$



Esempio: Possiamo considerare lo stesso esempio di prima con la seguente modifica: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{-1}{x^2}\right) = -\infty$

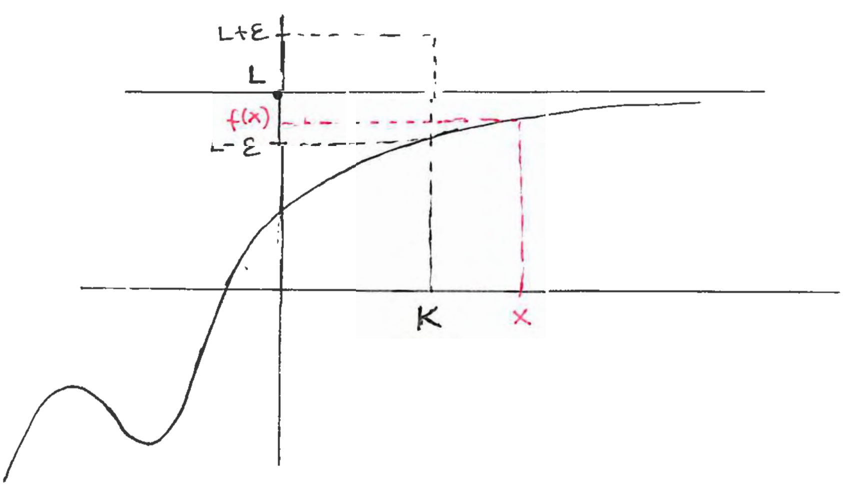
$\forall M>0,\ \exists\,\delta(M)>0$ che soddisfa $|x|<\delta$?

$f(x)<-M \Rightarrow -\frac{1}{x^2}<-M \Rightarrow \frac{1}{x^2}>M \Rightarrow x^2<\frac{1}{M} \Rightarrow |x|<\frac{1}{\sqrt{M}}$, quindi

basta scegliere $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$

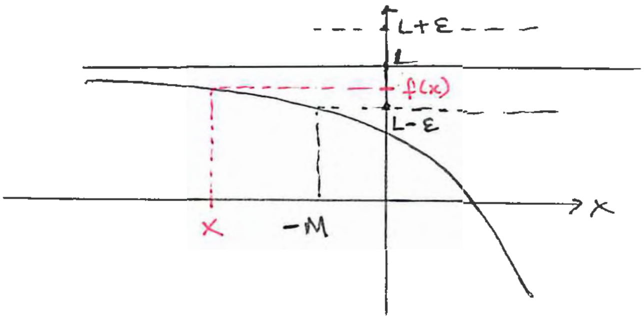
3) Definizione di limite finito per x tendente a un valore infinito

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \iff \forall \varepsilon>0,\ \exists\, K(\varepsilon)>0 \text{ tale che se si considera } x>K,\ \forall x\in C.E, \text{ allora } |f(x)-L|<\varepsilon.}$$



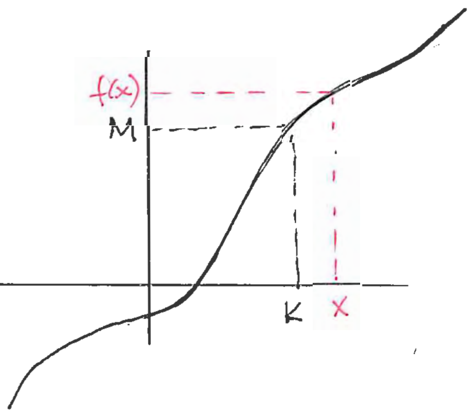
Osservazione: se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ oppure se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, si dice che f ha un asintoto orizzontale di equazione $y=L$ per $x\to+\infty$ oppure per $x\to-\infty$, rispettivamente.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists K(\varepsilon)>0$ tale che se si considera $x<-K$, $\forall x\in C.E$, allora $|f(x)-L|<\varepsilon$

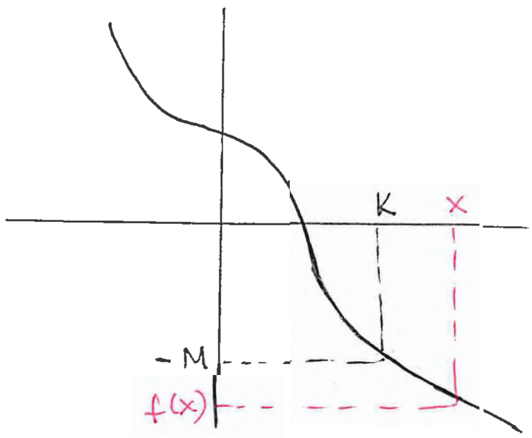


4) Definizione di limite infinito per x tendente a un valore infinito

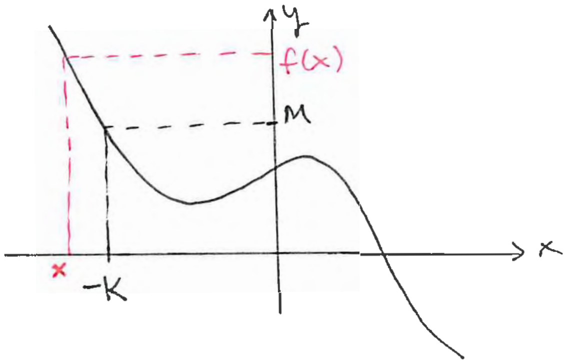
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0; \exists K(M)>0$ tale che se si considera $x>K$, $\forall x\in C.E$, allora $f(x)>M$.



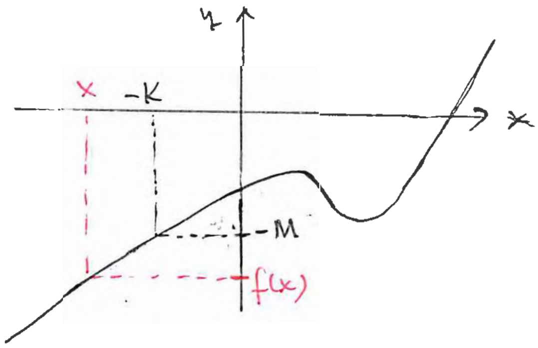
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists K(M)>0$ tale che se si considera $x>K$, $\forall x\in C.E$, allora $f(x)<-M$.



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M>0,\ \exists K(M)>0$$ tale che se si considera $x<-K$, $\forall x \in C.E.$, allora $f(x)>M$



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \iff \forall M>0,\ \exists K(M)>0$$ tale che se si considera $x<-K$, $\forall x \in C.E.$, allora $f(x)<-M$.



Esercizi: 1) Verificare che $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x}{x+1}} = 1$.

$\forall \varepsilon>0$, $\exists K(\varepsilon)>0$ tale che per $\forall x>K$, abbiamo $|f(x)-L|<\varepsilon$, cioè,

$$\underbrace{1-\varepsilon < \sqrt{\frac{x}{x+1}}}_{1°} \overbrace{< 1+\varepsilon}^{2°}$$

1° $(1-\varepsilon)^2 < \frac{x}{x+1} \Rightarrow \underbrace{(x+1)(1-\varepsilon)^2}_{x(1-\varepsilon)^2+(1-\varepsilon)^2} < x$

$x[(1-\varepsilon)^2-1] < -(1-\varepsilon)^2$

$x[1-(1-\varepsilon)^2] > (1-\varepsilon)^2$

$x > \frac{(1-\varepsilon)^2}{(1-(1-\varepsilon)^2)}$

2° $\frac{x}{x+1} < (1+\varepsilon)^2$

$x < \underbrace{(x+1)(1+\varepsilon)^2}_{x(1+\varepsilon)^2+(1+\varepsilon)^2}$

$x[1-(1+\varepsilon)^2] < (1+\varepsilon)^2$

$x[(1+\varepsilon)^2-1] > -(1+\varepsilon)^2$

$x > \frac{-(1+\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^2-1}$ } negativo

sempre soddisfatto

Scegliamo $K = \frac{(1-\varepsilon)^2}{(1-(1-\varepsilon)^2)}$

2) $$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{1-x} = +\infty$$

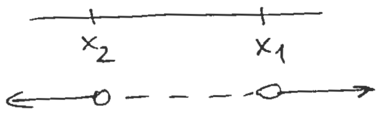
$\forall M>0$, $\exists K(M)>0$ tale che per $\forall x<-K$, abbiamo $f(x)>M$, cioè,

$\frac{x^2}{1-x} > M$; per $x\to-\infty$, consideriamo $x<1$,

$$x^2 > M - Mx$$

$$x^2 + Mx - M > 0$$

$$x = \frac{-M \pm \sqrt{M^2+4M}}{2} = \begin{cases} \frac{-M+\sqrt{M^2+4M}}{2} = x_1 \\ \frac{-M-\sqrt{M^2+4M}}{2} = x_2 \end{cases}$$



$\underbrace{x<x_2}_{\text{ci serve}}$ $\vee$ $x>x_1$

Quindi scegliamo $-K = x_2 = \frac{-M-\sqrt{M^2+4M}}{2}$

ovvero $K = \frac{M+\sqrt{M^2+4M}}{2}$

Limite destro / sinistro, eccesso / difetto

Teorema (di unicità del limite di una funzione): Consideriamo una funzione $f(x)$. Se il limite per $x\to x_0$ della funz. $f(x)$ esiste finito o infinito, allora il valore di tale limite è unico.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}^* \Rightarrow L \text{ è unico} \qquad (\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\})$$

Definizione (Limite destro e sinistro):

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \quad (x \text{ tende a } x_0 \text{ da destra})$$

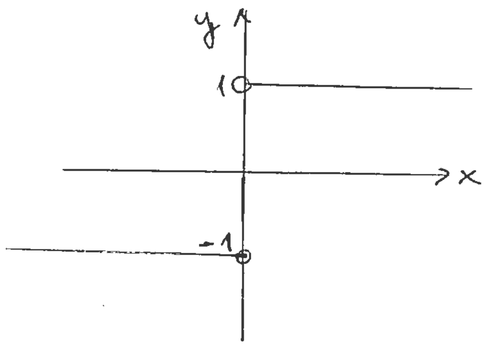
se per ogni $\varepsilon>0$, $\exists\,\delta(\varepsilon)>0$ tale che $|f(x)-L|<\varepsilon$ per $x_0 < x < x_0+\delta$, $\forall x \in C.E.$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \quad (x \text{ tende a } x_0 \text{ da sinistra})$$

se per ogni $\varepsilon>0$, $\exists\,\delta(\varepsilon)>0$ tale che $|f(x)-L|<\varepsilon$ per $x_0-\delta < x < x_0$, $\forall x \in C.E.$

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



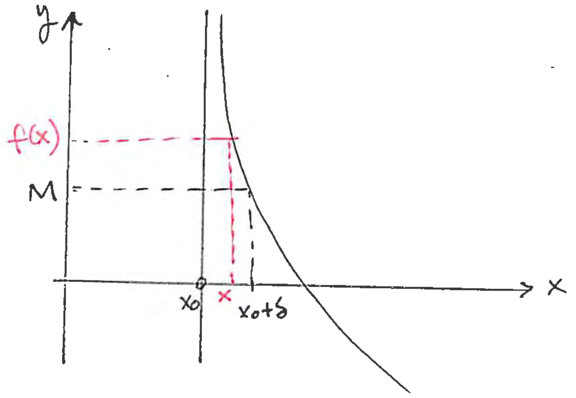
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

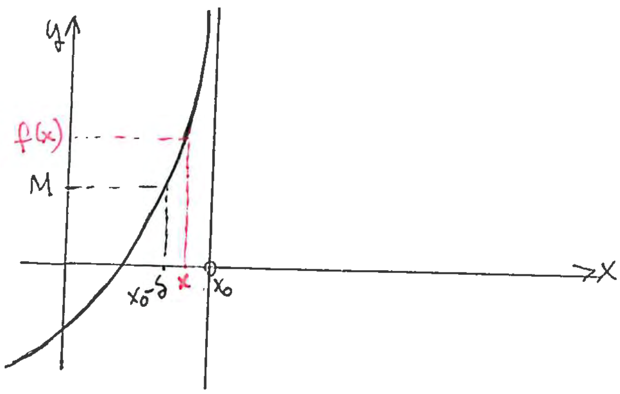
Nel caso esistono due valori distinti per x tenda a x_0 da destra e da sinistra, per il teorema di unicità, $\lim_{x \to 0} f(x)$ non esiste.

Più in generale: Il limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ esiste se e solo se esistono, e sono entrambi uguali a L, i limiti destro e sinistro $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta(M) > 0$ tale che per $x_0 < x < x_0 + \delta$ $\forall x \in C.E$, allora $f(x) > M$.



$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta(M) > 0$ tale che per $x_0 - \delta < x < x_0$ $\forall x \in C.E$, allora $f(x) > M$.



- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty \iff \forall M>0,\ \exists \delta(M)>0$ tale che per $x_0 < x < x_0+\delta$

$\forall x \in C.E$, allora $f(x) < -M$.

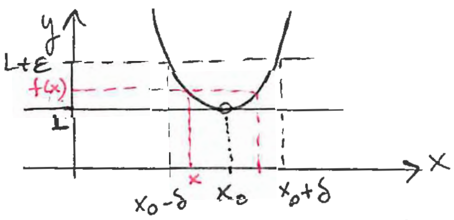
- $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \iff \forall M>0,\ \exists \delta(M)>0$ tale che per $x_0-\delta < x < x_0$

$\forall x \in C.E$, allora $f(x) < -M$.

Definizione (Limite per eccesso o per difetto):

Il limite per eccesso (da sopra):

$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L^+ \iff \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta(\varepsilon) \text{ tale che per } |x-x_0|<\delta \ \forall x \in C.E,\ x \neq x_0, \text{ allora } L < f(x) < L+\varepsilon.}$

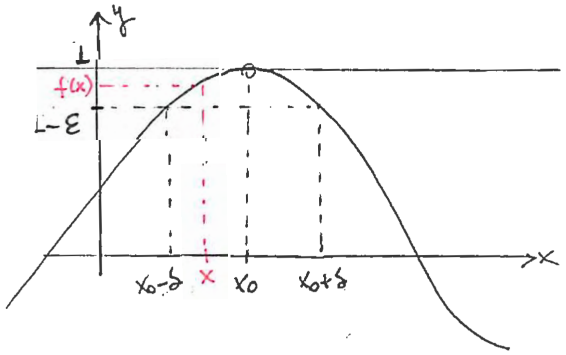


$x_0-\delta < x < x_0+\delta$, $\forall x \in C.E$ e $x \neq x_0$

$L < f(x) < L+\varepsilon$

Il limite per difetto (da sotto):

$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L^- \iff \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta(\varepsilon) \text{ tale che per } |x-x_0|<\delta \ \forall x \in C.E.,\ x \neq x_0, \text{ allora } L-\varepsilon < f(x) < L.}$



$x_0-\delta < x < x_0+\delta$, $\forall x \in C.E$ e $x \neq x_0$

$L-\varepsilon < f(x) < L$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L^+ \iff \forall \varepsilon>0,\ \exists K(\varepsilon)>0$ tale che per $x>K$,

$\forall x \in C.E$, allora $L < f(x) < L+\varepsilon$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L^- \iff \forall \varepsilon>0,\ \exists K(\varepsilon)>0$ tale che per $x>K$,

$\forall x \in C.E.$, allora $L-\varepsilon < f(x) < L$

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L^+ \Leftrightarrow \forall \varepsilon, \exists K(\varepsilon) > 0$ tale che per $x < -K$

$\forall x \in C.E.$, allora $L < f(x) < L + \varepsilon$.

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L^- \Leftrightarrow \forall \varepsilon, \exists K(\varepsilon) > 0$ tale che per $x < -K$

$\forall x \in C.E.$, allora $L - \varepsilon < f(x) < L$.

Esercizi 1) Verificare che $\lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty$

$\forall M > 0, \exists \delta(M) > 0$ t.c. per $\forall x$, $x_0 < x < x_0 + \delta$, cioè, $2 < x < 2 + \delta$

abbiamo: $\frac{x+1}{x-2} > M$

per $x > 2$; $x + 1 > Mx - 2M$

$x(1 - M) > -2M - 1$

$x(M-1) < 2M + 1$

$$x < \frac{2M+1}{M-1} = \frac{2(M-1)+3}{M-1} = 2 + \frac{3}{M-1}$$

Quindi scegliamo $\delta = \frac{3}{M-1}$

2) Verificare che $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1^+$

$\forall \varepsilon > 0, \exists K(\varepsilon) > 0$ t.c. per $\forall x > K$, $L < f(x) < L + \varepsilon$, cioè,

$$\underbrace{1 < \frac{x+1}{x-1}}_{} < 1 + \varepsilon$$

questo é vero perchè
Num > Denom

$\frac{x+1}{x-1} < 1 + \varepsilon$ dato che $x \to +\infty$, consideriamo $x > 1$;

$x + 1 < (1+\varepsilon)(x-1)$

$\cancel{x} + 1 < \cancel{x} - 1 + \varepsilon x - \varepsilon$

$\varepsilon x > \varepsilon + 2$

$\rightarrow x > \frac{\varepsilon+2}{\varepsilon}$ quindi scegliamo $K = \frac{\varepsilon+2}{\varepsilon}$

Operazioni e forme di indecisione

Consideriamo $y=f(x)$ e $y=g(x)$ con i limiti:

- $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ +\infty \\ -\infty}} f(x) = L_1 \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ +\infty \\ -\infty}} g(x) = L_2 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \lim_{\substack{x\to x_0 \\ +\infty \\ -\infty}} \left(f(x)+g(x)\right) = L_1 + L_2$$

se $L_1 = \pm\infty$, $L_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim \dots = \pm\infty$

se $L_1 = \pm\infty$, $L_2 = \pm\infty \Rightarrow \lim \dots = \pm\infty$

se $L_1 = +\infty$, $L_2 = -\infty \Rightarrow [\infty - \infty]$ forma di indecisione

- $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ +\infty \\ -\infty}} f(x) = L_1 \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ +\infty \\ -\infty}} f(x) = L_2 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \lim_{\substack{x\to x_0 \\ +\infty \\ -\infty}} f(x)\cdot g(x) = L_1 \cdot L_2$$

se $L_1 = \infty$, $L_2 \neq 0 \Rightarrow \lim \dots = \infty$

se $L_1 = \infty$, $L_2 = \infty \Rightarrow \lim \dots = \infty$

se $L_1 = 0$, $L_2 = \infty \Rightarrow [0 \cdot \infty]$ forma di indecisione

- $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ +\infty \\ -\infty}} f(x) = L_1 \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ +\infty \\ -\infty}} f(x) = L_2 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \lim_{\substack{x\to x_0 \\ +\infty \\ -\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$

se $L_1 \neq 0$, $L_2 = 0 \Rightarrow \lim \dots = \frac{L_1}{0} = \begin{cases} +\infty & \text{se } L_1 > 0 \\ -\infty & \text{se } L_1 < 0 \end{cases}$

se $L_1 = 0$, $L_2 \neq 0 \Rightarrow \lim \dots = \frac{0}{L_2} = \begin{cases} 0^+ & \text{se } L_2 > 0 \\ 0^- & \text{se } L_2 < 0 \end{cases}$

se $L_1 \neq 0$, $L_2 = \infty \Rightarrow \lim \dots = \frac{L_1}{\infty} = 0$

se $L_1 = \infty$, $L_2 \neq 0 \Rightarrow \lim \dots = \frac{\infty}{L_2} = \infty$

$\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ forme di indecisione

- $$\lim_{\substack{x\to x_0\\ +\infty\\ -\infty}} [f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{\substack{x\to x_0\\ +\infty\\ -\infty}} f(x)\right]^{\lim_{\substack{x\to x_0\\ +\infty\\ -\infty}} g(x)}$$

Le forme di indecisioni sono le seguenti :

$$[1^\infty], [0^0], [\infty^0], [\infty-\infty], [0\cdot\infty], \left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Ogni forma di indecisione ha la sua strategia di risoluzione. Questi tipi di esercizi possono essere risolti ricorrendo a:

1. Limiti notevoli
2. Teoremi sui limiti (teorema del confronto)
3. Risoluzioni algebrici (scomposizioni, semplificazioni, riscritture equivalenti, ecc.)
4. ~~Teorema di De l'Hôpital~~
5. ~~Limiti calcolati con gli sviluppi di Taylor~~

Confronti e stime asintotiche

Def: Si dice che due funzioni f, g sono asintotiche per $x\to x_0$ se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad e$$

si scrive $f \sim g$ per $x\to x_0$.

Esercizi 1) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{1-\cos(x)} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

Raccogliamo e^{-x} al numeratore:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x}\,\frac{(e^{2x}-1)}{1-\cos(x)}$$

Spezziamo il limite come prodotto di limiti:

$$\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x}}_{1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{1-\cos x}$$

$\left(\left.\begin{array}{l}\text{se } f(x)\to 0 \\ \text{e } g(x)\to 0\end{array} \text{ per } x\to 0\right\}\right.$ abbiamo $e^{f(x)}-1 \to f(x)$ e $1-\cos(g(x)) \to \frac{g^2(x)}{2}$ $\Big)$

Quindi: $e^{2x}-1 \sim 2x$ e $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{4}{x} = 4 \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

Attenzione! se $x\to 0^+$ allora il limite è $+\infty$

invece se $x\to 0^-$ allora il limite è $-\infty$

Alcune stime asintotiche per le funzioni

1) $\sin(f(x)) \sim f(x)$ se $f(x) \to 0$

(x può tendere a ciò che vuole, importante che $f(x) \to 0$)

2) $1-\cos(f(x)) \sim \frac{f^2(x)}{2}$ se $f(x) \to 0$

3) $\tan(f(x)) \sim f(x)$ se $f(x) \to 0$

4) $e^{f(x)} - 1 \sim f(x)$ se $f(x) \to 0$

5) $\ln(1+f(x)) \sim f(x)$ se $f(x) \to 0$

6) $\arcsin(f(x)) \sim f(x)$ se $f(x) \to 0$

7) $\arctan(f(x)) \sim f(x)$ se $f(x) \to 0$

8) $\alpha^{f(x)} - 1 \sim \ln(\alpha) \cdot f(x)$, $\forall \alpha > 0$ se $f(x) \to 0$

9) $(1+f(x))^{\alpha} - 1 \sim \alpha \cdot f(x)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ se $f(x) \to 0$

10) $\log_a(1+f(x)) \sim \frac{f(x)}{\ln a}$, $a>0, a \neq 1$ se $f(x) \to 0$

11) $\left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} \sim e$ se $f(x) = \pm\infty$

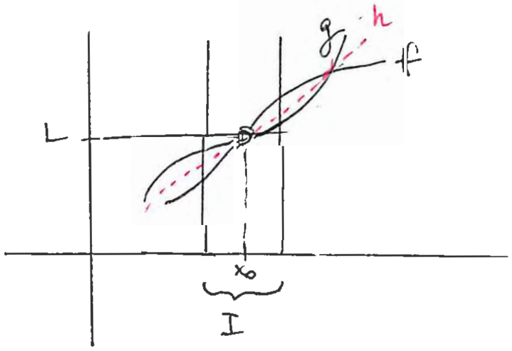
Teorema (del confronto per i limiti): Sia x_0 un numero reale e siano tre funzioni f, g, h definite in un <u>intorno</u> bucato di x_0, che chiamiamo I, se:

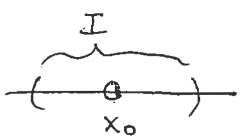
1) $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L$ con $L \in \mathbb{R}$

allora

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = L$$





f, g, h sono definite in $I(x_0) - \{x_0\}$
intorno bucato di x_0

Esercizi sulle successioni

Verificare se i seguenti limiti sono corretti applicando la definizione.

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{2n}+1}{e^n-1} = +\infty$

$\forall M>0$, $\exists N\overset{\text{intero}}{>}0$ tale che $\forall n>N \Rightarrow a_n>M$.

$$\frac{e^{2n}+1}{e^n-1} > M$$

Denom: e^n-1 definitivamente positivo per $n\to\infty$

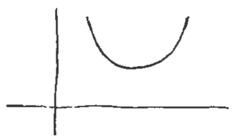
Quindi abbiamo;

$$e^{2n}+1 > Me^n - M$$

$$e^{2n} - Me^n + (M+1) > 0$$

$$e^n = \frac{M \pm \sqrt{M^2-4(M+1)}}{2}$$

(i) se M è abbastanza piccolo tale che il Δ è negativo, la disequazione è verificata per $\forall n$.



$a>0$

(ii) se M è grande e il Δ è positivo, allora la disequazione è verificata per:

$$e^n < \frac{M-\sqrt{K}}{2} \quad ; \quad e^n > \frac{M+\sqrt{K}}{2} \qquad \text{per } K = M^2-4(M+1)$$

$$n < \ln\left(\frac{M-\sqrt{K}}{2}\right) \quad ; \quad n > \ln\left(\frac{M+\sqrt{K}}{2}\right)$$

Quindi basta scegliere N intero maggiore di $\ln\left(\frac{M+\sqrt{K}}{2}\right)$.

Così il limite è ok!

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+1}{n-1} = 3^+$

Il limite è ok per $N = \dfrac{4+\varepsilon}{\varepsilon}$

Calcolare i limiti per $n \to +\infty$ di :

3) $a_n = \dfrac{n^2 - 1}{2^n - 3^n}$ $\qquad 3^n \gg n^2$

$\to 3^n$ è prevalente rispetto al 2^n per $n \to \infty$

denum. tende all'infinito più rapidamente dal numeratore quindi $a_n \to 0^-$ per $n \to \infty$

perchè $\frac{N}{D} \sim \frac{1}{-\infty} = 0^-$

4) $a_n = \dfrac{n^{10} - n^5}{n!}$

$n^{10} - n^5 \sim n^{10}$

fattoriale $\gg$ potenza, allora $D \gg N$, $\frac{N}{D} \sim \frac{1}{\infty} = 0^+$, quindi $a_n \to 0^+$

5) $a_n = \dfrac{10^{\sqrt{\ln^2(n) - \ln(n^2)}}}{n+1}$

$\ln(n^2) = 2\ln(n)$; $\ln^2(n) \gg 2\ln(n)$

$\sqrt{\ln^2(n) - \ln(n^2)} \sim \sqrt{\ln^2(n)} = \ln(n)$

$\ln(n) = \dfrac{\log_{10} n}{\log_{10} e} \Rightarrow 10^{\ln(n)} = 10^{\frac{\log_{10} n}{\log_{10} e}} = \left(10^{\log_{10} n}\right)^{\frac{1}{\log_{10} e}} = n^{\frac{1}{\log_{10} e}}$

$1 < e < 10 \Rightarrow \log_{10} 1 < \log_{10} e < \log_{10} 10 \Rightarrow 0 < \log_{10} e < 1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\log_{10} e} > 1$

$a_n \sim \dfrac{n^k}{n+1}$ dove $k > 1$, quindi $a_n \to +\infty$

6) $a_n = \dfrac{n \ln n + 1}{[\ln(\ln n)]^4 + 1}$

$\ln(\ln n) \ll \ln n \ll n \ln n$

Num $\gg$ Denum.

Quindi $a_n \to +\infty$

7) $a_n = \dfrac{\ln(3 + \sin(n))}{n^3}$

$\ln 2 \le \ln(3 + \underbrace{\sin(n)}_{[-1,1]}) \le \ln 4$

$\Rightarrow$ num. è limitato e positivo

$a_n \sim \frac{1}{\infty}$, quindi $a_n \to 0$ (oppure 0^+)

8) $a_n = \dfrac{\ln(\tan(\frac{1}{n}))}{\ln(\frac{1}{n})}$

$\tan(\frac{1}{n}) = \dfrac{\sin(1/n) \sim 1/n}{\cos(1/n) \to 1} \sim \dfrac{1}{n}$

$a_n \sim \dfrac{\ln(1/n)}{\ln(1/n)}$, quindi $a_n \to 1$ per $n \to \infty$

9) $a_n = \left(\sqrt[3]{\dfrac{n^2-1}{n^2+1}} - 1\right) n^2$ L.N: $(1+a_n)^\alpha - 1 \sim \alpha . a_n$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\dfrac{n^2-1}{n^2+1} = 1 + \dfrac{-2}{n^2+1}$

$a_n = \underbrace{\left[\left(1+\dfrac{-2}{n^2+1}\right)^{1/3} - 1\right]}_{\sim \frac{1}{3}\left(\frac{-2}{n^2+1}\right)} . n^2 \sim \dfrac{-2n^2}{3n^2+3}$, quindi $a_n \to -\frac{2}{3}$ per $n \to \infty$

10) $a_n = \dfrac{\left(\frac{n+3}{n+4}\right)^n}{n}$ L.N: $\left(1+\dfrac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e$; $b_n = \dfrac{n+4}{-1}$

$\left(\dfrac{n+3}{n+4}\right)^n = \underbrace{\left(1+\dfrac{-1}{n+4}\right)^{\frac{n+4}{-1}}}_{\to e}{}^{\cdot \underbrace{\frac{-1}{n+4} \cdot n}_{\to -1}}$

$a_n \to \dfrac{e^{-1}}{\infty} = 0$ per $n \to \infty$

11) $a_n = \left(\overbrace{\sqrt[3]{8+\sin(1/n)} - 2}^{b_n}\right)\left(2n + \frac{1}{8n}\right)$ L.N: $(1+a_n)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot a_n$, Vacere

$$\left(8+\sin(1/n)\right)^{1/3} = \left[\left(1+\frac{\sin(1/n)}{8}\right)\cdot 8\right]^{1/3} = 2\left(1+\frac{\sin(1/n)}{8}\right)^{1/3}$$

$$b_n = 2\left[\left(1+\frac{\sin(1/n)}{8}\right)^{1/3} - 1\right] \sim \cancel{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin(1/n)}{\cancel{8}4} \sim \frac{1}{12}(1/n)$$

perchè $\sin(1/n) \sim 1/n$ per $n\to\infty$

Quindi $a_n \sim \frac{1}{12n}\left(2n+\overset{\to 0}{\frac{1}{8n}}\right) \to \frac{1}{6}$ per $n\to\infty$

Esercizi sulle serie

Determinare il carattere

1) $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$

Per il criterio del rapporto;

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \underbrace{\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}_{a_{n+1}} \cdot \underbrace{\frac{n^n}{2^n \cdot n!}}_{1/a_n} = \frac{2\cdot\cancel{2^n}\,\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}}{(n+1)^n\cdot\cancel{(n+1)}}\cdot\frac{n^n}{\cancel{2^n}\cdot\cancel{n!}} = 2\,\frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= 2\cdot\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{2}{e} \quad \text{per } n\to\infty$$

Dato che $2/e < 1$, la serie di partenza converge.

2) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n}$ Per il criterio del rapporto;

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)}\cdot\frac{n}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{n+1}\cdot\frac{n}{\cancel{(2n)!}} = \frac{4n^3+\dots}{n+1} \sim 4n^2$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} 4n^2 = \infty > 1$, la serie di partenza diverge.

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\sin n}{\sqrt[3]{n^2}}$

Per il criterio del confronto;

Sappiamo che la serie $\sum \frac{1}{n^{2/3}}$ diverge $\left(\alpha = 2/3 < 1 \text{ serie armonica generalizzata}\right)$

Osserviamo che

$$\frac{3+\overset{[-1,1]}{\sin n}}{\sqrt[3]{n^2}} \geq \frac{2}{\sqrt[3]{n^2}}$$

Dato che $\sum \frac{2}{n^{2/3}} = 2 \sum \frac{1}{n^{2/3}}$ diverge, allora anche la serie di partenza diverge.

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+\cos n}{\sqrt[4]{n^5}}$ Per il criterio del confronto;

Sappiamo che la serie $\sum \frac{1}{n^{5/4}}$ converge $\left(\alpha = 5/4 > 1 \text{ serie armonica generalizzata}\right)$

Osserviamo che

$$\frac{5+\overset{[-1,1]}{\cos n}}{\sqrt[4]{n^5}} \leq \frac{6}{\sqrt[4]{n^5}}$$

Dato che $\sum \frac{6}{n^{5/4}} = 6 \sum \frac{1}{n^{5/4}}$ converge, allora anche la serie di partenza converge.

5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+e^{-n^2}}$

Per il criterio di Cauchy;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+e^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{e^{n^2}}}_{\to 0}} = 1$$

La serie non converge.

6) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+e^{-n}}{n^2-\ln(n)}$$

Per il criterio del confronto asintotico;

$$\frac{n+e^{-n}}{n^2-\ln(n)} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

Dato che $\sum \frac{1}{n}$ diverge (una serie armonica con $\alpha=1$), allora anche la serie di partenza diverge.

7) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2+n\sqrt[3]{n}}{n^4+n^2+1}$$ per il criterio del confronto asintotico

$$\frac{4n^2+n\sqrt[3]{n}}{n^4+n^2+1} \sim \frac{4n^2}{n^4} = \frac{4}{n^2} \quad ; \quad \sum \frac{4}{n^2} = 4\sum \frac{1}{n^2}$$ converge (una serie armonica generalizzata con $\alpha=2>1$)

$\Rightarrow$ la serie di partenza converge.

8) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\sin(1/n)}{n+1}$$ Per il criterio del conf. asin.

$$\frac{3+\sin(1/n)}{n+1} \sim \frac{3+\frac{1}{n}}{n+1} = \frac{3n+1}{n^2+n} \sim \frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n}$$

$\sum \frac{3}{n} = 3\sum \frac{1}{n}$ diverge (serie armonica con $\alpha=1$), allora anche la serie di partenza diverge.

9) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln\left(\frac{3n+4}{2n-1}\right)\right]^n$$

Per il criterio della radice; $\ln e = 1$, $e=2.7\ldots$

$$\sqrt[n]{a_n} = \ln\left(\frac{3n+4}{2n-1}\right) \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{3n+4}{2n-1}\right) = \ln\frac{3}{2} < 1$$

Quindi la serie di partenza converge.

10) Determinare il carattere e se è possibile trovare la somma.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n}$$

$\frac{2}{3^n} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$; $2\sum\left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge perchè è una serie geometrica di

ragione $r = \frac{1}{3} < 1$; sappiamo che $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge a $\frac{1}{1-\frac{1}{3}}$.

Possiamo scrivere : $2\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 2\left[\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n} - \left(\frac{1}{3}\right)^0 - \left(\frac{1}{3}\right)^1\right]$

$$= 2\left(\frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(nk)}{1+(nk)^2}$, $k \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{\ln(nk)}{1+(nk)^2} \sim \frac{\ln(nk)}{(nk)^2}$$

poiché $\ln(nk)$ è definitivamente minore di qualunque potenza positiva di (nk)

sarà anche $\ln(nk) < \sqrt{nk}$ definitivamente, quindi:

$\frac{\ln(nk)}{(nk)^2} < \frac{\sqrt{nk}}{(nk)^2} = \frac{1}{(nk)^{3/2}}$; $\sum \frac{1}{(nk)^{3/2}}$ è una serie armonica gen.
con $\alpha = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$ converge

Quindi anche la serie di partenza converge per il criterio del confronto.

12) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ $\left(\sum (-1)^n a_n\right)$

è una serie a segni alterni.

$\left|\frac{(-1)^n}{n!}\right| = \frac{1}{n!}$ e per il criterio del rapporto:

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! = \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = \frac{1}{n+1} \to 0$ per $n \to \infty$

Dato che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 0 < 1$, la serie $\sum \frac{1}{n!}$ converge

Quindi la serie di partenza converge assolutamente.

13) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt[3]{n}-1}{\sqrt{n}-1}$ $\quad \left(\sum (-1)^n \cdot a_n\right)$

$a_n \sim \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/6}}$; $\sum \frac{1}{n^{1/6}}$ è una serie armonica generalizzata con $\alpha = 1/6 < 1 \Rightarrow$ diverge

Applichiamo il criterio di Leibniz:

(i) $\frac{1}{n^{1/6}} \geq 0$

(ii) $a_n \geq a_{n+1}$

$\frac{1}{n^{1/6}} \geq \frac{1}{(n+1)^{1/6}} \Rightarrow$ decrescente

(iii) $\frac{1}{n^{1/6}} \to 0$ per $n \to \infty$

Perciò la serie di partenza converge semplicemente!

14) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}$

$\left|\frac{(-1)}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$; $\sum \frac{1}{n}$ diverge (serie armonica con $\alpha = 1$), allora

anche $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge per il criterio del confronto asintotico.

Applichiamo il criterio di Leibniz:

(i) $\frac{1}{n+1} \geq 0$

(ii) $a_n \geq a_{n+1}$

$\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n+2} \Rightarrow$ decrescente

(iii) $\frac{1}{n+1} \to 0$ per $n \to \infty$

Perciò la serie di partenza converge semplicemente.

Esercizi sulle funzioni

* Determinare il campo di esistenza e i zeri della seguente funzione:

$$y = \ln\left(\log_2\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right|\right)$$

$\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right| > 0$ soddisfatto sempre per $|x-1| \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

$$\log_2\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right| > 0 \Rightarrow \left|\frac{x^2-1}{x-1}\right| > 1$$

$x^2-1>0$ $-1 \quad 1$ $+ \circ - \circ +$

$x-1>0$
$x>1$

	$x<-1$	-1	$-1<x<1$	1	$x>1$
$\lvert x^2-1\rvert$:	x^2-1	$\circ$	$1-x^2$	$\circ$	x^2-1
$\lvert x-1\rvert$:	$-(x-1)$		$-(x-1)$	$\circ$	$x-1$

se $x<-1$: $\frac{x^2-1}{-(x-1)} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{-\cancel{(x-1)}} = -x-1 > 1$
$x<-2$

$-2 \quad -1$ $\Big\}\ x<-2$

se $-1 \leq x < 1$: $\frac{1-x^2}{-(x-1)} = \frac{\cancel{(1-x)}(1+x)}{\cancel{1-x}} = 1+x > 1$
$x>0$

$-1 \quad 0 \quad 1$ $\Big\}\ 0<x<1$

se $x>1$, $x \neq 1$: $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = x+1 > 1$
$x>0$

$0 \quad 1$ $\Big\}\ x>1$

C.E: $(-\infty,-2) \cup (0,1) \cup (1,\infty)$

i zeri: $x=0 \notin$ C.E

$y=0 \Rightarrow \log_2\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right| = 1$

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right| = 2 \Rightarrow |x^2-1| = 2|x-1|$$

$x<-1$;
$x^2-1 = -2(x-1)$
$x^2+2x-3=0$
$(x+3)(x-1)=0$
$x = \begin{cases} -3 \\ 1 \notin \text{C.E.} \end{cases}$
$\boxed{x=-3}$

$-1<x<1$
$1-x^2 = -(x-1)$
$\cancel{1}-x^2 = -x+\cancel{1}$
$x^2-x=0$
$x(x-1)=0$
$\left.\begin{matrix} x=0 \\ x=1 \end{matrix}\right\} \notin$ C.E

$x>1$
$x^2-\cancel{1} = x-\cancel{1}$
$x^2-x=0$
$x(x-1)=0$
$\left.\begin{matrix} x=0 \\ x=1 \end{matrix}\right\} \notin$ C.E

per $y=0 \Rightarrow x=-3$

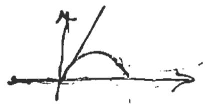
Verificare se i limiti seguenti sono corretti utilizzando le definizioni di limite:

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 2^-$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon)$? tale che per $\forall x \, (x \neq 0) : |x - 0| < \delta$

$\Rightarrow 2 - \varepsilon < \frac{\sin x}{x} < 2$

Per $x > 0$; $\begin{cases} \sin x < 2x & \text{è vero} \\ \sin x > 2x - \varepsilon x & \text{è falso se } \varepsilon \text{ è abbastanza piccolo} \end{cases}$



$\Rightarrow$ limite è sbagliato

2) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0^-$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon)$? tale che per $\forall x, \; 0 < x < \delta \Rightarrow -\varepsilon < \frac{1}{\ln x} < 0$

Osserviamo che $\ln(x) < 0$ per $x \to 0^+$

$\begin{cases} \frac{1}{\ln x} < 0 & \text{è vero} \\ \frac{1}{\ln x} > -\varepsilon & \Rightarrow \ln x < -\frac{1}{\varepsilon} \end{cases}$ (Prendiamo il reciproco)

$x < e^{-1/\varepsilon}$

Basta scegliere $\delta = e^{-1/\varepsilon}$