TEOREMI FONDAMENTALI DEI LIMITI

① **Teorema di unicità del limite**: Sia f una funzione definita in un intorno bucato di x_0, cioè, $I(x_0)-\{x_0\}$ (escluso al più x_0), se esiste

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \text{, allora}$$

L è <u>unico</u>.

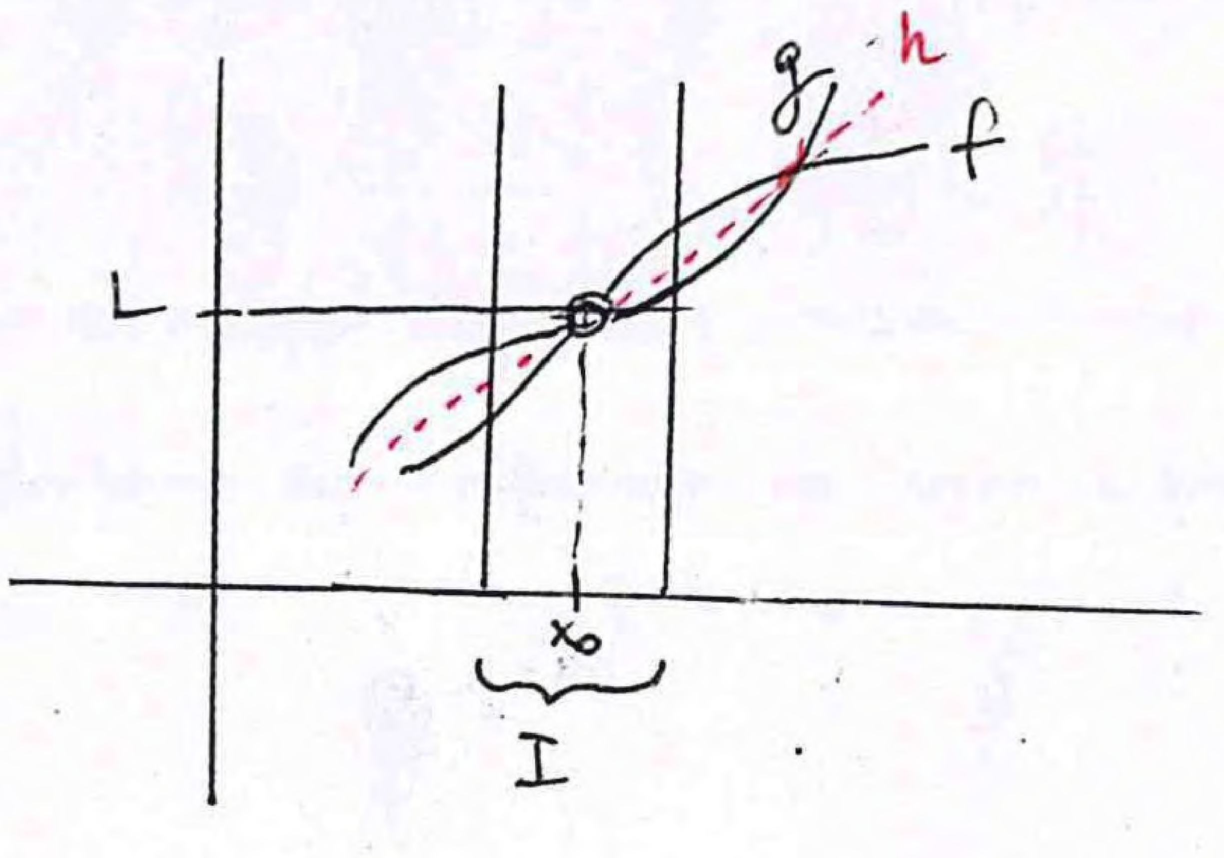
② **Teorema (del confronto per i limiti)**: Sia x_0 un numero reale e siano tre funzioni f, g, h definite in un <u>intorno</u> bucato di x_0, cioè $I(x_0)-\{x_0\}$, se:

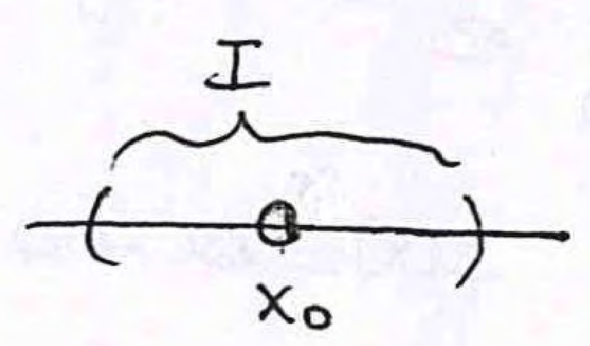
1) $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad , \forall x \in I(x_0)-\{x_0\}$

2) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = L$ con $L \in \mathbb{R}$

allora

$$\exists \lim_{x\to x_0} h(x) = L$$





f, g, h sono definite in $I(x_0)-\{x_0\}$
intorno bucato di x_0

Esempi sul teorema del confronto:

1) $\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Consideriamo due funzioni f e g che hanno lo stesso limite per $x \to 0$ e tali che $f(x) \leq x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq g(x)$.

$$\left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x| \cdot \underbrace{\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|}_{-1 \leq \sin(\frac{1}{x}) \leq 1} \leq |x|$$

$\left(|a| < K \text{ equivalente a } -K < a < K \right)$

$$-|x| \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x| \quad , \forall x \neq 0$$

Inoltre,

$$\lim_{x\to 0} -|x| = \lim_{x\to 0} |x| = 0$$

Quindi per il teorema del confronto, concludiamo $\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

2) $\lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

*

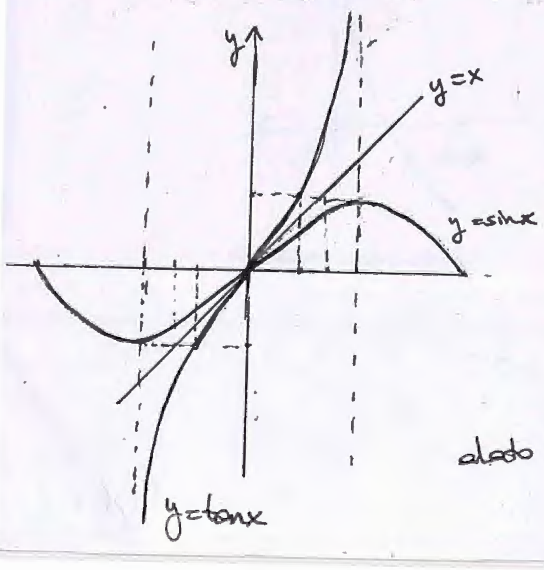
$$0 < \sin\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} \quad , \forall x > 0$$

* $\left(\begin{array}{l} \text{per } t > 0 \text{ , } \sin t < t \\ \text{se } t \to \frac{1}{x} \text{ per } t > 0 \text{ abbiamo } x > 0 \\ \text{quindi } \sin\frac{1}{x} < \frac{1}{x} \end{array} \right)$

e poiché $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ allora

$$\lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$



Consideriamo l'intervallo $(0, \pi/2)$, per $x > 0$ abbiamo

$$\sin x < x < \tan x$$

dividendo per $\sin x$, che è positivo perché $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

e infine passando ai reciproci, si ottiene

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

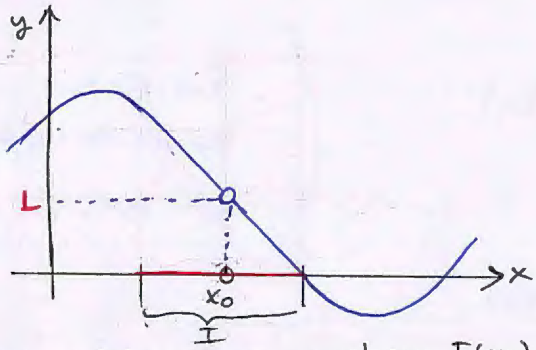
e dal teorema del confronto

dato che $\lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0} 1 = 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$

③ **Teorema:** Sia f una funzione definita in un intorno di x_0, cioè, $I(x_0)$, e esiste $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, allora $f(x)$ è limitata in $I(x_0)$.

(i) Teorema della permanenza del segno

Se $L > 0$, allora esiste un intorno $I(x_0)$ tale che per $\forall x \in I(x_0)$ e $x \neq x_0$, $f(x) > 0$ definitivamente per $x \to x_0$.



$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \text{ per } \forall x \in I(x_0),\ x \neq x_0$$

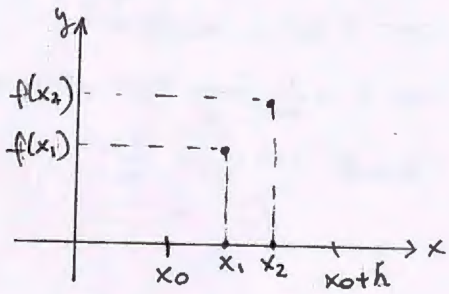
(ii) Corollario al teorema di permanenza del segno:

Se $f(x) \geq 0$ definitivamente per $x \to x_0$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \geq 0$.

In breve, esiste almeno un intorno $I(x_0)$ in cui la funzione assume lo stesso segno del suo limite

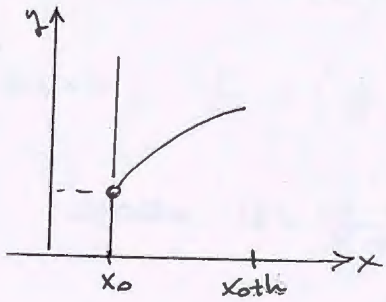
~~Utilità del teorema~~: Questo teorema fornisce una condizione sufficiente affinché una funzione sia localmente positiva (o negativa), e di riflesso: (i) permette di mostrare l'esistenza di intervalli in cui una data disequazione è soddisfatta; (ii) permette di confrontare localmente due funzioni.

Osservazione: Sia $y = f(x)$ monotona su (x_0, x_0+h). Sappiamo dal concetto di cr/dec: Per $x_1 \leq x_2$, se $f(x_1) \leq f(x_2)$ allora f è crescente, invece se $f(x_1) \geq f(x_2)$ allora f è decrescente.



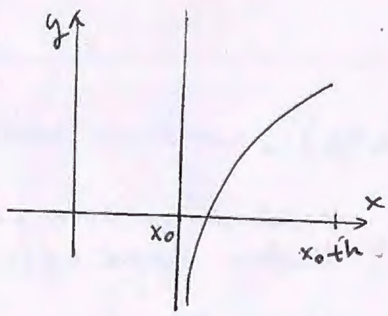
Abbiamo due casi su (x_0, x_0+h)

(i)



$\exists$ limite, finito

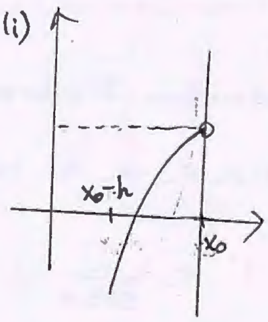
(ii)



$\exists$ limite, infinito

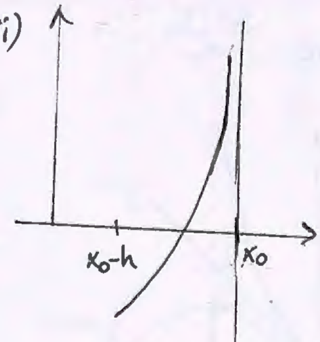
Abbiamo due casi su (x_0-h, x_0)

(i)



$\exists$ limite, finito

(ii)



$\exists$ limite, infinito

Una funzione monotona è una funzione regolare, quindi limite esiste sempre, è finito o infinito.

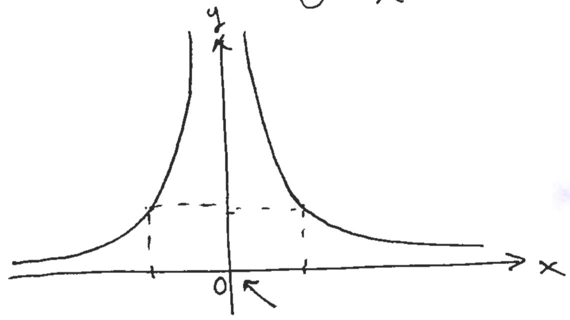
Infiniti ed Infinitesimi

Infiniti

Una funzione che per $x \to x_0$ tende a $\pm\infty$ è infinito.

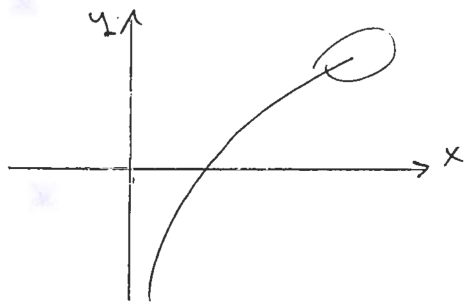
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

Ad esempio: $y = \frac{1}{x^2}$ per $x \to 0$

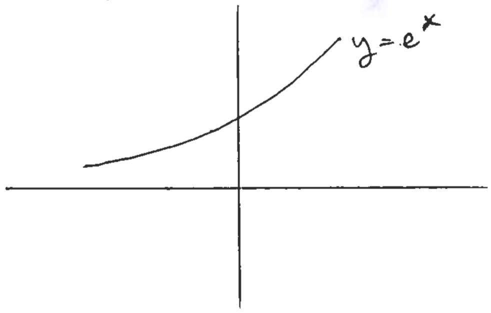


- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

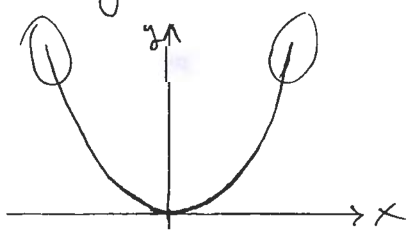
Ad esempio $y = \ln(x)$



$y = e^x$



- $y = x^k$, k pari



$\lim_{x \to \pm\infty} x^k = +\infty$, k pari

Sia f e g due infiniti, consideriamo il limite del rapporto:

$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \pm\infty)}} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & \to f \text{ è d'ordine inf a } g \\ \infty & \to f \text{ è d'ordine sup a } g \\ L \neq 0 & \to f \text{ e } g \text{ sono dello stesso ordine} \\ \nexists & \end{cases}$$

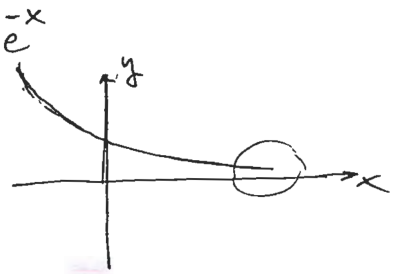
forme di indecisione: $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$

Esercizi: 1) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2-5x+1}{2x^2-1}$

NUM : $[\infty - \infty]$ $\quad 3x^2\left(1-\underbrace{\frac{5}{3x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{3x^2}}_{\to 0}\right) = 3x^2$ $\qquad N \sim 3x^2$

$D = 2x^2-1 \sim 2x^2$ $\quad ; \quad \dfrac{N}{D} \sim \dfrac{3\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \dfrac{3}{2}$

2) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{5e^{2x}+1}{3e^{3x}-1}$ $\quad \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

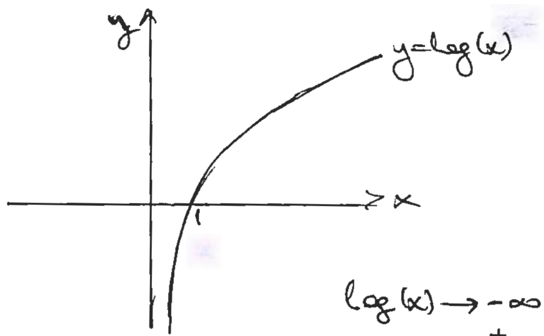


$N \sim 5e^{2x}$
$D \sim 3e^{3x}$ $\quad \Rightarrow \quad \dfrac{N}{D} \sim \dfrac{5}{3e^x} \to 0$ per $x \to +\infty$

3) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\log^2(x-1)+1}{\log(x-1)+3}$

$= \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\log^{\cancel{2}}(x-1)\left(1+\underbrace{\frac{1}{\log^2(x-1)}}_{\to 0}\right)}{\cancel{\log(x-1)}\left(1+\underbrace{\frac{3}{\log(x-1)}}_{\to 0}\right)} = +\infty$

4) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\log^2(x)+2\log(x)}{3\log^3 x+1}$



$N: (-\infty)^2 + 2\cdot(-\infty) = \infty - \infty$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{\cancel{\log^2(x)}\left[1+\frac{2}{\log x}\right]}{3\underbrace{\log^{\cancel{3}}(x)}_{\to -\infty}\left[1+\frac{1}{3\log^3(x)}\right]}$

$\log(x) \to -\infty$ per $x \to 0^+$

$\dfrac{2}{\underbrace{\log x}_{-\infty}} \to 0^-$, $\dfrac{1}{3\underbrace{\log^3(x)}_{-\infty}} \to 0^-$ per $x \to 0^+$

$= \dfrac{1}{-\infty} = 0^-$

5) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{3e^{\frac{1}{x-1}}+1}{2e^{\frac{3}{x-1}}-1} = 0^+$

$e^{\frac{1}{x-1}} \to e^{\frac{1}{0^+}} = +\infty \Rightarrow \dfrac{3\cdot(+\infty)+1}{2(+\infty)^3-1}$ $\nearrow f$ $\searrow g$; f è d'ordine inf a g

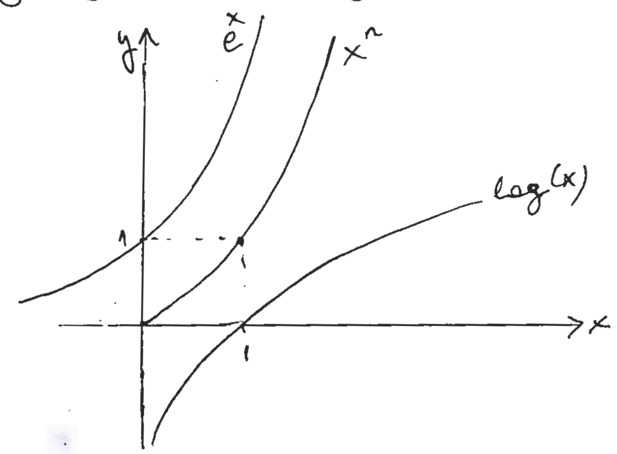
$e^{\frac{3}{x-1}} = \left(e^{\frac{1}{x-1}}\right)^3$

$\hookrightarrow \dfrac{1}{(+\infty)^2}$

quindi tende a 0^+.

Prevalente: è di ordine sup. quello con potenza più elevata

$\log(\log(x)) << \log(x) << x^n << e^x << e^{e^x}$



Esercizi: 1) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^5-1}{(\log(x))^{10}} = +\infty$

$\dfrac{\infty_{POT}}{\infty_{POT \text{ di un logaritmo}}}$; $(\log(x))^{10} << x^5$

2) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}-x}{x^3-x^2} = +\infty$

$\dfrac{\infty_{exp}}{\infty_{POT}}$; $x^3 << e^{2x}$

3) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}+x^2}{3x^2-\log^5 x} = \dfrac{1}{3}$

$\left.\begin{array}{l} N: e^{-x}+x^2 \\ D: 3x^2-\log^5 x \end{array}\right\} \sim \dfrac{\cancel{x^2}}{3\cancel{x^2}} = \dfrac{1}{3}$

4) $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{e^{\frac{1}{2-x}}}{\log(4-x^2)} = -\infty$

Per $x\to 2^-$;

$N: e^{\frac{1}{2-x}} \to e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$

$D: \log(0^+) = -\infty$

$\dfrac{+\infty_{esp}}{-\infty_{log}}$; $\log << esp$

5) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{2\log(x)}{e^{1/x}} = 0^-$

Per $x\to 0^+$;

$N: 2\log(0^+) = -\infty$

$D: e^{1/x} \to e^{1/0^+} = e^{+\infty} = +\infty$

$\dfrac{-\infty_{log}}{+\infty_{esp}} = 0^-$

Infinitesimi

Una funzione che per $x \to x_0$ tende a 0 è un infinitesimo.

Siano f e g due infinitesimi:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & \to f \text{ è infinitesimo di ordine sup. a } g \\ \infty & \to f \text{ è infinitesimo di ordine inf a } g \\ L \neq 0 & \to f \text{ e } g \text{ sono infinitesimi dello stesso ordine} \\ \nexists & \end{cases}$$

In una somma di infinitesimi è prevalente quello di ordine inferiore!

Forme di indecisione: $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$

Esercizi: 1) $\lim_{x \to 0^+} (x^3 - x^2) = 0^-$

$$x^3 - x^2 = \underbrace{x^2}_{0^+}\underbrace{(x-1)}_{-1} \to 0^-$$

2) $\lim_{x \to 0^+} \frac{2\log(1+x)}{3\log(1+x) + \log^2(1+x)} = \frac{2}{3}$

$\log(1+x) \to 0$ per $x \to 0^+$

$\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\left.\begin{aligned} N &= 2\log(1+x) \\ D &\sim 3\log(1+x) \end{aligned}\right\} \frac{N}{D} \sim \frac{2\cancel{\log(1+x)}}{3\cancel{\log(1+x)}} = \frac{2}{3}$$

(è prevalente quello di ordine inferiore)

3) $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} + e^{x+1}}{2e^{3x+1} + e^{2x}} = +\infty$

$$N = e^{x+1}(1 + e^{x-1}) \sim e^{x+1}$$

$$e^{x-1} \to e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0^+$$

$$\frac{N}{D} \sim \frac{e^{x+1}}{e^{2x}} = e^{-x+1} \to e^{+\infty} = +\infty \quad \text{per } x \to -\infty$$

$$D = e^{2x}\underbrace{(1 + 2e^{x+1})}_{\to 1} \sim e^{2x}$$

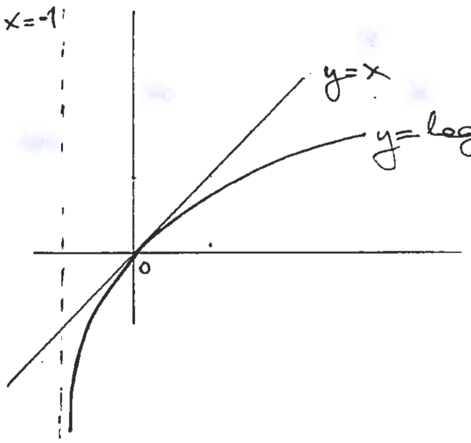
$$2e^{x+1} \to 0^+$$

Prevalente tra infinitesimi: $O_{log} << O_{pot} << O_{esp}$

Esercizi 1) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{\log(x)}}{e^{-x}}$ $\left[\frac{0}{0}\right]$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{\log(x)}$; $\dfrac{+\infty_{esp}}{+\infty_{log}} = +\infty$

2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x}$ $\left[\frac{0}{0}\right]$



sono zeri dello stesso ordine

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = 1$

LIMITI NOTEVOLI DELLE FUNZIONI

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln(a)}$ con $a>0$, $a\neq 1$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x} = \ln(a)$ con $a>0$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$ con $\alpha\in\mathbb{R}$

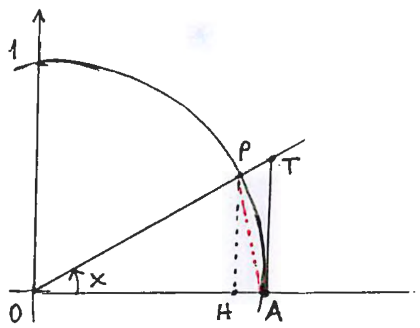
(Valgono anche quando sostituiamo $f(x)$ con x)

La dimostrazione del limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Osserviamo subito che, essendo $\sin x$ e x funzioni dispari, $\frac{\sin x}{x}$ è funzione pari e quindi è sufficiente calcolare $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}$, cioè, lavoriamo con $x \geq 0$.

Osservando la figura:



si vede che l'area del triangolo $\hat{OPA}$ è minore di quella del settore circolare $\widehat{OPA}$, a sua volta minore di quella del triangolo $\hat{OTA}$. Ne segue:

$$A(\hat{OPA}) \leq A(\widehat{OPA}) \leq A(\hat{OTA})$$

$$\frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}$$

$$\sin x \leq x \leq \tan x$$

dividendo per $\sin x$, si ha

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

passando ai reciproci, si ottiene

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$A(\widehat{OPA}) = \frac{x}{2\cancel{\pi}} \cdot \cancel{\pi} \overset{\nearrow 1}{r^2} = \frac{x}{2}$$

$$A(\hat{OPA}) = \frac{\overset{\nearrow 1}{|OA|} \cdot |PH|}{2} = \frac{\sin x}{2}$$

$$|PH| = \sin x \cdot \overset{\nearrow 1}{|OP|} = \sin x$$

$$A(\hat{OTA}) = \frac{\overset{\nearrow 1}{|OA|} \cdot |TA|}{2} = \frac{\tan x}{2}$$

$$|TA| = \tan x \cdot \overset{\nearrow 1}{|OA|} = \tan x$$

Dal teorema del confronto, essendo $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$, si deduce

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Proviamo ora che: $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Infatti:

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{\overset{\nearrow \sin^2 x}{1-\cos^2 x}}{x^2(1+\cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{\underbrace{1+\cos x}_{1}} \longrightarrow \frac{1}{2} \quad \text{per } x \to 0$$

Esercizi :

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 8x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 8x}{8x}\cdot 8 = 8 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 8x}{8x} = 8.1 = 8$$

2) $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x\cos x} = \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}}_{1} = 1$$

3) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1^2 = 1$$

4) $$\lim_{x\to 0} \frac{2x+3\sin x}{4x-2\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{x}+3\cdot\frac{\sin x}{x}}{\frac{4x}{x}-2\frac{\sin x}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2+3}{4-2} = \frac{5}{2}$$

$\frac{\sin x}{x} \to 1$

5) $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 7x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan 7x}{7x}\cdot 7 = 7 \lim_{x\to 0} \frac{\tan 7x}{7x} = 7.1 = 7$$

6) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x}}_{1/2} = \frac{1}{2}$$

7) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{4x} =$$

8) $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{5x} =$$

9) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^4 x}{x^4} =$$

10) $$\lim_{x\to 0} \frac{5x-7\sin x}{4x-3\sin x} =$$

11) $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 7x}{2x} =$$

12) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} =$$

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{x}{5}\cdot\frac{5}{x}\cdot x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{5} = e^{5}$

14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{2x}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x}{7}}\right)^{\frac{2x}{7}}\right]^{\frac{7}{2x}\cdot x} = e^{7/2} = \sqrt{e^{7}}$

15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{4}}\right)^{\frac{x}{4}}\right]^{\frac{4}{\cancel{x}}\cdot x^{\cancel{2}}} = e^{\infty} = \infty$

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+4}{2x-3}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3+7}{2x-3}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{2x-3}\right)^{x}$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x-3}{7}}\right)^{\frac{2x-3}{7}}\right]^{\frac{7}{2x-3}\cdot x} = e^{7/2} = \sqrt{e^{7}}$

$\frac{7}{2x-3}\cdot x \to 7/2$

17) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x^2} =$

18) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{5x}\right)^{x} =$

19) a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{5x}\right)^{x^2} =$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{6}{5x}\right)^{x^2} =$

20) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{5x+2}\right)^{x} =$

Confronti e stime asintotiche

Def: Si dice che due funzioni f, g sono asintotiche per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$ e

si scrive $f \sim g$ per $x \to x_0$.

Alcune stime asintotiche per le funzioni

1) $\sin(f(x)) \sim f(x)$ se $f(x) \to 0$
2) $1 - \cos(f(x)) \sim \frac{f^2(x)}{2}$ se $f(x) \to 0$
3) $\tan(f(x)) \sim f(x)$ se $f(x) \to 0$
4) $e^{f(x)} - 1 \sim f(x)$ se $f(x) \to 0$
5) $\ln(1 + f(x)) \sim f(x)$ se $f(x) \to 0$
6) $\arcsin(f(x)) \sim f(x)$ se $f(x) \to 0$
7) $\arctan(f(x)) \sim f(x)$ se $f(x) \to 0$
8) $\alpha^{f(x)} - 1 \sim \ln(\alpha) \cdot f(x)$, $\forall \alpha > 0$ se $f(x) \to 0$
9) $(1 + f(x))^{\alpha} - 1 \sim \alpha \cdot f(x)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ se $f(x) \to 0$
10) $\log_a(1 + f(x)) \sim \frac{f(x)}{\ln a}$, $a > 0, a \neq 1$ se $f(x) \to 0$
11) $\left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} \sim e$ se $f(x) = \pm\infty$

(x può tendere a ciò che vuole, importante che $f(x) \to 0$)

Esercizi:

1) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2-x+5} + 2x \qquad [\infty-\infty]$

Moltiplichiamo e dividiamo per $\sqrt{4x^2-x+5} - 2x$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2-x+5}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2-x+5}-2x\right)}{\sqrt{4x^2-x+5}-2x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{4x^2}-x+5-\cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2-x+5}-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+5}{\sqrt{4x^2-x+5}-2x}$$

$\sqrt{4x^2-x+5} \sim \sqrt{4x^2} = |2x| \quad ; \quad -x+5 \sim -x$

Dato che $x\to-\infty$, $|2x| = -2x$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-\cancel{x}}{-4\cancel{x}} = \frac{1}{4}$$

2) $\lim_{x\to0} (e^x+x)^{1/x} \qquad [1^\infty]$

$$\lim_{x\to0} e^{\ln(e^x+x)^{1/x}} = \lim_{x\to0} e^{\frac{1}{x}\ln(e^x-1+1+x)}$$

per $x\to0$, $e^x-1 \sim x$

$$= \lim_{x\to0} e^{\frac{1}{x}\ln(x+1+x)} = \lim_{x\to0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+2x)}$$

per $x\to0$, $f(x)=2x\to0$, quindi $\ln(1+2x)\sim 2x$

$$= \lim_{x\to0} e^{\frac{1}{x}\cdot 2x}$$

$$= \lim_{x\to0} e^2 = e^2$$

3) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^3 + x\arctan(x))}{\ln(x)}$ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left[x^3\left(1+\frac{\arctan(x)}{x^2}\right)\right]}{\ln(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x^3 + \ln\left(1+\frac{\arctan(x)}{x^2}\right)}{\ln(x)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x^3}{\ln x} + \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{\arctan(x)}{x^2}\right)}{\ln x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3\cancel{\ln x}}{\cancel{\ln x}} + \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{\overset{\to \text{limitata}}{\arctan(x)}}{x^2 \cdot \ln(x)}}_{0} = 3$$

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = \frac{\overset{\to \text{per } x\to\infty,\ \arctan(x)\to\frac{\pi}{2}}{\arctan x}}{x^2} \to 0 \quad \text{per } x\to\infty \\ \ln(1+f(x)) \sim f(x) \\ \quad \text{il limite notevole} \end{array}\right]$$

4) $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - x}{\ln(x)}$ $\left[\frac{0}{0}\right]$

$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x(x-1)}{\ln(x)}$ (sia $f(x) = x-1$; per $x\to 1$, $f(x)\to 0$)

quindi il limite notevole $\ln(1+\overset{f(x)}{\widetilde{(x-1)}}) \sim x-1$)

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x(x-1)}{\ln(x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x(x-1)}{\ln(1+(x-1))}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} x = 1$$

Le forme di indecisioni sono le seguenti:

$$[1^\infty],\ [0^0],\ [\infty^0],\ [\infty-\infty],\ [0\cdot\infty],\ \left[\frac{0}{0}\right],\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Ogni forma di indecisione ha la sua strategia di risoluzione. Questi tipi di esercizi possono essere risolti ricorrendo a:

1. Limiti notevoli
2. Teoremi sui limiti (teorema del confronto)
3. Risoluzioni algebrici (scomposizioni, semplificazioni, riscritture equivalenti, ecc.
4. Teorema di De l'Hôpital
5. Limiti calcolati con gli sviluppi di Taylor

~~5)~~ $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{1-\cos(x)}$ $\quad \left[\frac{0}{0}\right]$

Raccogliamo e^{-x} al numeratore:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x}\,\frac{(e^{2x}-1)}{1-\cos(x)}$$

Spezziamo il limite come prodotto di limiti:

$$\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x}}_{1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{1-\cos x}$$

$\left(\text{se } f(x)\to 0 \text{ e } g(x)\to 0 \text{ per } x\to 0\right\}$ abbiamo $e^{f(x)}-1 \sim f(x)$ e $1-\cos(g(x)) \sim \dfrac{g^2(x)}{2}\Big)$

Quindi: $e^{2x}-1 \sim 2x$ e $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{4}{x} = 4 \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

Attenzione! se $x\to 0^+$ allora il limite è $+\infty$

invece se $x\to 0^-$ allora il limite è $-\infty$

– ASINTOTI –

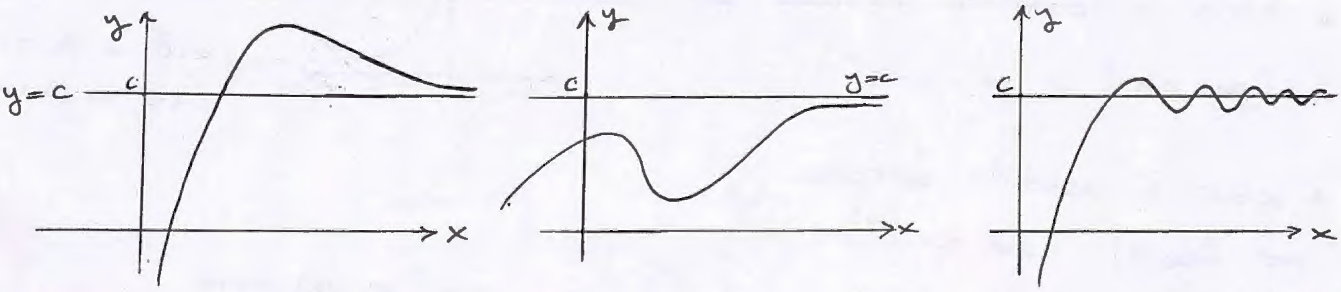
Asintoto orizzontale

Si dice che f ha un asintoto <u>orizzontale</u> di equazione $y=c$ $(c\in\mathbb{R})$ per $x\to+\infty$ oppure per $x\to-\infty$ se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=c \quad \text{oppure} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=c \quad \text{, rispettivamente.}$$

Ogni situazione di limite finito all'infinito, quindi, corrisponde graficamente alla presenza di un asintoto orizzontale, ossia di una retta orizzontale a cui il grafico della funzione si avvicina sempre più.

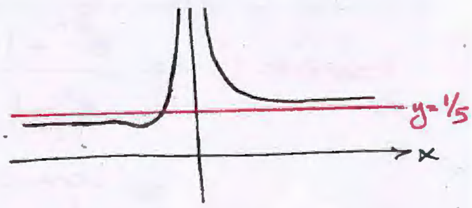
Se invece $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ $\left(\text{oppure } \lim_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty\right)$ allora la funzione non ha un asintoto orizzontale per $x\to+\infty$ (oppure per $x\to-\infty$).



$y=c$ è un asintoto orizzontale

Questa funzione tende a c per $x\to+\infty$, ma non si può affermare che $f(x)\to c^+$, né che $f(x)\to c^-$

Esempi: 1) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+7}{4+5x^2}$



$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+7}{5x^2+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x+7}{5x^2+4}=\frac{1}{5}$$

Quindi f ha due asintoti orizzontali $y=1/5$

2) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2^x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2^x}=\frac{1}{2^{-\infty}}=2^{+\infty}=+\infty$$

f ha come asintoto orizzontale a destra (cioè per $x\to+\infty$) la retta $y=0$, mentre a sinistra (per $x\to-\infty$) <u>non ha</u> asintoto orizzontale.

Asintoto verticale

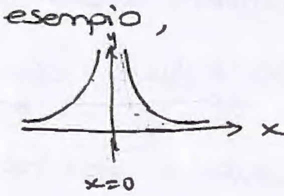
Si dice che f ha un <u>asintoto verticale</u> di equazione $x=x_0$ ($x_0 \in \mathbb{R}$) per $x \to x_0$ (oppure per $x \to x_0^+$ o $x \to x_0^-$) se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \ (\text{o } -\infty)$$

(oppure questo accade per $x \to x_0^+$ o $x \to x_0^-$, rispettivamente)

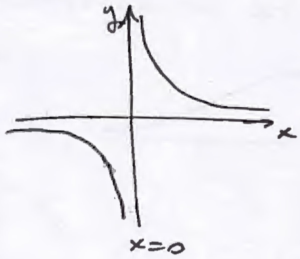
Ogni situazione di limite infinito al finito, quindi, corrisponde graficamente alla presenza di un asintoto verticale, ossia di una retta verticale a cui il grafico della funzione si avvicina sempre più. Ad esempio,

- $x=0$ è asintoto verticale per $\frac{1}{x^2}$ (per $x \to 0$)



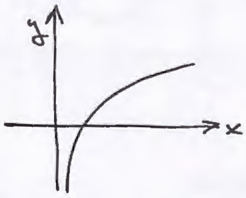
$x \to 0^+$ o 0^-
$f(x) \to +\infty$

- $x=0$ è asintoto verticale per $\frac{1}{x}$ (per $x \to 0^+$ e per $x \to 0^-$)



$x \to 0^+ \Rightarrow f(x) \to +\infty$
$x \to 0^- \Rightarrow f(x) \to -\infty$

- $x=0$ è asintoto verticale per $\log(x)$ (per $x \to 0^+$)



$x \to 0^+ \Rightarrow f(x) \to -\infty$

Esercizi: 1) $y = \dfrac{e^{2x}+1}{e^x-1}$ C.E: $e^x \neq 1$, $x \neq 0$ $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

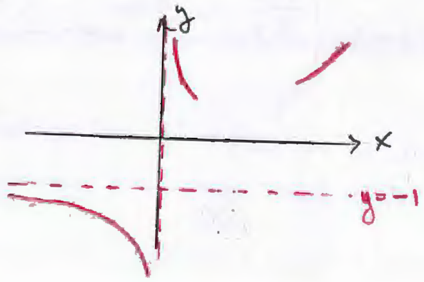
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x}+1}{e^x-1} = \frac{\frac{1}{e^{\infty}}+1}{\frac{1}{e^{\infty}}-1} = -1 \Rightarrow y=-1 \text{ as. orizz. per } x \to -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}+1}{e^x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^x}\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = e^{+\infty} = +\infty \quad \nexists \text{ as. orizz. per } x \to +\infty$$

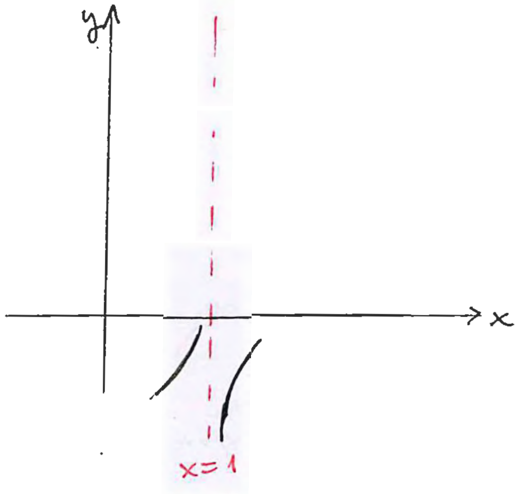
se $x \to 0^-$ $\quad y \to \dfrac{e^0+1}{e^0-1} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$

se $x \to 0^+$ $\quad y \to \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

$x=0$ (asse y) è as. vert.



2) $y=(x-2)\,e^{\frac{x}{x-1}}$ C.E : $x-1\neq 0$
$x\neq 1$



se $x\to 1^- \Rightarrow y \to (1-2)e^{\frac{1}{0^-}}$

$y \to -1\cdot e^{-\infty} = \frac{-1}{e^{+\infty}} = 0^-$

se $x\to 1^+ \Rightarrow y\to -e^{\frac{1}{0^+}} = -e^{+\infty} = -\infty$

Asintoto obliquo

Nei casi in cui una funzione presenta limite infinito all'infinito, può accadere (ma non sempre) che esista una retta, obliqua, a cui il grafico della funzione si avvicina indefinitamente. Si parla in tal caso di asintoto obliquo.

Precisamente: si dice che una funzione $f(x)$ ha asintoto obliquo

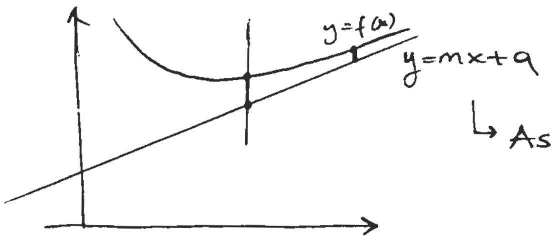
$y = mx+q$ $(m\neq 0,\ q\in\mathbb{R})$ per $x\to+\infty$ (o per $x\to-\infty$) se

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (-\infty)}} \left(f(x)-(mx+q)\right)=0$$

Esempio: Sia $f(x)=2x+1+e^{x}$. Studiamo la funzione per $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(2x+1) = \lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$$

Perciò, per definizione di asintoto obliquo, si riconosce che la retta $y=2x+1$ è asintoto obliquo per f, per $x\to-\infty$.



↳ As. obliquo se
$f(x)-(m+q)\to 0$ per $x\to+\infty$

Proposizione: La funzione $f(x)$ ammette asintoto obliquo per $x\to+\infty$ se e solo se valgono le seguenti due condizioni:

1. Esiste finito $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m\neq 0$;

2. Esiste finito $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=q$

(dove m è il numero calcolato al punto 1). In tal caso l'asintoto è $y = mx + q$. Analogo criterio vale per $x \to -\infty$.

Esempio: Studiamo la funzione $f(x) = 3x + \sqrt{x}$ per $x \to +\infty$. Si vede subito che $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Vediamo se presenta un asintoto obliquo. Calcoliamo perciò:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(3 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 3 = m$$

Calcoliamo ora

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left[(3x+\sqrt{x}) - 3x\right] = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Poichè questo limite è infinito (non esiste q), la funzione non ammette asintoto obliquo.

Esercizio 1) $y = \dfrac{x^2-2}{x+1}$, $\exists$ As. Obl. per $x \to +\infty$?

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2-2}{x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2}{x+1} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2}{x^2+x} = \underset{m}{1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx)$$

$$\frac{x^2-2}{x+1} - x = \frac{\cancel{x^2} - 2 - \cancel{x^2} - x}{x+1} = \frac{-x-2}{x+1} \xrightarrow[\text{per } x\to+\infty]{} -1 = q$$

$y = mx + q$

$y = x - 1$ è asintoto obliquo per y, per $x \to +\infty$

$$y = \frac{x^2-2}{x+1}$$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^2} - 2 & x+1 \\ \hline -\cancel{x^2} \mp x & x-1 \\ \hline -\cancel{x} - 2 & \\ \cancel{+x} + 1 & \\ \hline -1 & \end{array} \Rightarrow x - 1 - \frac{1}{x+1}$$

$$y = x - 1 - \frac{1}{x+1}$$

2) $y=\sqrt[3]{x^3-x^2}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m$$

$$\frac{\sqrt[3]{x^3-x^2}}{x}=\sqrt[3]{\frac{x^3-x^2}{x^3}}\to 1 \quad \text{per } x\to+\infty$$

$$y-mx=\sqrt[3]{x^3-x^2}-x=\sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)}-x=x\sqrt[3]{1-1/x}-x$$

$$=x\left(\sqrt[3]{1-1/x}-1\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1/3}-1\sim\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x}\right)\quad;\quad\left(\frac{1}{x}\to 0 \text{ per } x\to+\infty\right)$$

$$\sim x\left(\frac{-1}{3x}\right)=-\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} y-mx=-\frac{1}{3}=q$$

As.Obl : $y=x-\frac{1}{3}$

3) $y=\ln\left(2e^{3x}+1\right)-x \quad , \forall x\in\mathbb{R}$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\-\infty}}\left(f(x)-(mx+q)\right)=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{\ln(\underbrace{\underbrace{2e^{3x}}_{0^+}+1}_{1})}_{\to 0}-x\right)-(-x)=0 \qquad y-(mx+q)\to 0 \text{ per } x\to-\infty$$

$y=-x$ As. Obl. per $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\ln(\underbrace{2e^{3x}+1}_{+\infty})}_{+\infty}-x\right)\qquad[\infty-\infty] \text{ forma di indecisione}$$

quindi,

$$\ln\left[2e^{3x}\left(1+\frac{1}{2e^{3x}}\right)\right]-x$$

$$=\ln 2+\underline{\underline{3x}}+\ln\left(1+1/2e^{3x}\right)\underline{\underline{-x}}$$

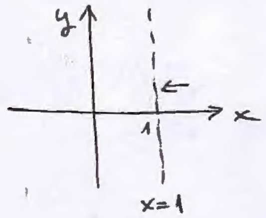
$$= 2x + \ln 2 + \underbrace{\ln\Big(\underbrace{1 + \underbrace{1/2e^{3x}}_{0^+}}_{1}\Big)}_{\to 0} - (2x+\ln 2) \to 0$$

per $x \to +\infty$

quindi $y = 2x + \ln 2$ As. Obl. per $x \to +\infty$

4) $y = 2x + \ln(x-1)$ C.E : $x > 1$

$$\lim_{x\to 1^+} (2x + \underbrace{\ln(\underbrace{x-1}_{0^+})}_{-\infty}) = -\infty \Rightarrow x=1 \text{ As. verticale a dx}$$



$$\lim_{x\to +\infty} y = +\infty \quad \nexists \text{ As. orizz. per } x \to +\infty$$

$$\frac{f(x)}{x} = 2 + \underbrace{\frac{\ln(x-1)}{x}}_{\to 0^+} \to 2 \quad \text{per } x \to +\infty$$

$x >> \ln(x-1)$

$$f(x) - mx = \cancel{2x} + \ln(x-1) - \cancel{2x} \to +\infty \quad \text{per } x \to +\infty \Rightarrow \nexists\, q$$

Poichè questo limite è infinito (non esiste q), la funzione non ammette asintoto obliquo.

Continuità

Definizione:

Data una funzione $f: I \to \mathbb{R}$, dove $I = Dom(f) \subseteq \mathbb{R}$, e $x_0 \in I$ si dice che f è continua in x_0 se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Si dice che f è continua in I se è continua in ciascun punto di I. Una funzione non continua in un punto x_0 si dice discontinua in x_0.

Definizione equivalente di funzione continua in un punto:

Considerando le definizioni di limite sinistro e destro, si dice che f è continua in un punto $x_0 \in I$ se

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)}$$

A parole,

(i) i due limiti sinistro e destro esistono finiti ed hanno lo stesso valore;

(ii) il comune valore dei due limiti sinistro e destro coincide con la valutazione della funzione nel punto, cioè, $f(c)$.

Definizione equivalente di funzione continua in un punto con δ e ε.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ tale che per $\forall x \in C.E.$, $|x - x_0| < \delta$ $(x_0 - \delta < x < x_0 + \delta)$

$\Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

Esercizi: 1) $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ è continua in $x = 3$?

C.E: $x + 1 \neq 0$
$x \neq -1$

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{5}{4}$$

$$y(3) = \frac{6-1}{3+1} = \frac{5}{4}$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ tale che per $\forall x \in C.E$, $3 - \delta < x < 3 + \delta$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{5}{4} - \varepsilon < \frac{2x-1}{x+1}}_{1°} < \frac{5}{4} + \varepsilon$$

1°) per $x \to 3$, $x + 1 > 0$

$$\left(\frac{5}{4} - \varepsilon\right)(x+1) < 2x - 1$$

$$\left(\frac{5-4\varepsilon}{4}\right)x + \frac{5-4\varepsilon}{4} < 2x - 1$$

$$\left(\frac{5-4\varepsilon}{4} - 2\right)x < \frac{4\varepsilon - 5}{4} - 1$$

$$\frac{5-4\varepsilon-8}{4}\, x < \frac{4\varepsilon-5-4}{4}$$

$$-\left(\frac{3+4\varepsilon}{4}\right)x < \frac{4\varepsilon - 9}{4}$$

$$x > \frac{9-4\varepsilon}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{3+4\varepsilon} = \frac{3(3+4\varepsilon) - 16\varepsilon}{3+4\varepsilon}$$

$$x > 3 - \frac{16\varepsilon}{3+4\varepsilon}$$

2°) $2x - 1 < (x+1)\left(\frac{5}{4} + \varepsilon\right)$

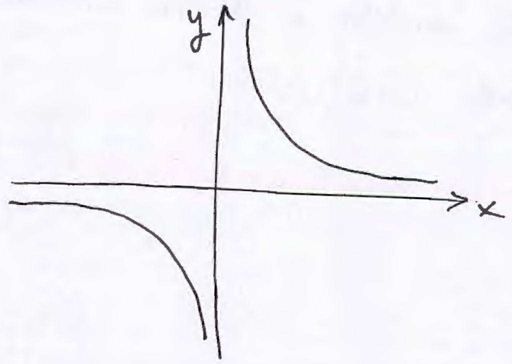
$\vdots$

$$x < 3 + \frac{16\varepsilon}{3-4\varepsilon}$$

Basta scegliere $\min\left(\frac{16\varepsilon}{3+4\varepsilon}, \frac{16\varepsilon}{3-4\varepsilon}\right)$

2) $y = \frac{1}{x}$ è continua in $x=0$?

($f(x)$ deve essere definita in x_0)



$y = \frac{1}{x}$

$x \neq 0$

non è continua in $x=0$.

(discontinua)

Funzione continua da sinistra, e da destra

Si dice che $f: I \to \mathbb{R}$ è <u>continua da sinistra</u> in un punto $x_0 \in I$ se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Equivalentemente, f è continua da sinistra in un punto $x_0 \in I$ se,

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ tale che per $\forall x \in C.E.$ $0 \leq x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Si dice che $f: I \to \mathbb{R}$ è <u>continua da destra</u> in un punto $x_0 \in I$ se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Equivalentemente, f è continua da destra in un punto $x_0 \in I$ se,

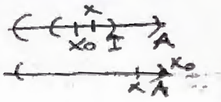
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ tale che per $\forall x \in C.E.$ $0 \leq x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Punti di Discontinuità

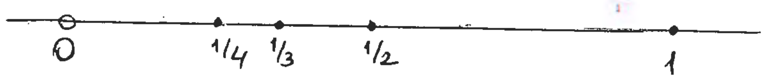
Dopo aver introdotto la nozione di funzione continua in un punto e su un intervallo, analizziamo i modi in cui una funzione può non soddisfare la definizione di continuità in un punto. Quindi si parla di punti di discontinuità e si fornisce una classificazione che conta tre tipologie di punti:

- discontinuità di prima specie
- " seconda "
- " terza "

Punto di accumulazione: Dato l'insieme $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ (non interessa che x_0 appartenga ad A o meno), si dice che x_0 è punto di accumulazione per A se in ogni intorno $I(x_0)$ di x_0 esiste almeno un elemento x diverso da x_0 ed appartenente ad A. In formule: $\forall I(x_0), \exists x \in A : x \in I(x_0), x \neq x_0$.



Esempio: $A = \left\{ \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\} \subset \mathbb{R}$



Diciamo che $x_0 = 0$ è un punto di accumulazione per A.

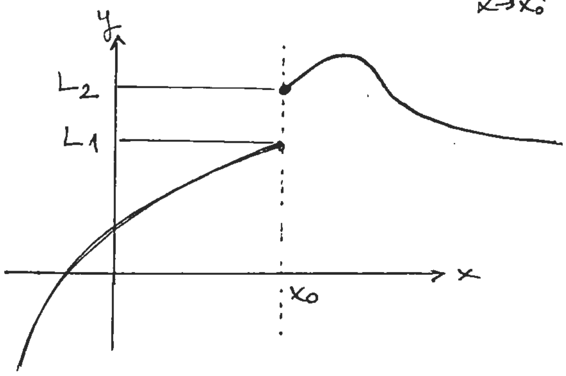
Discontinuità di prima specie (discontinuità a salto)

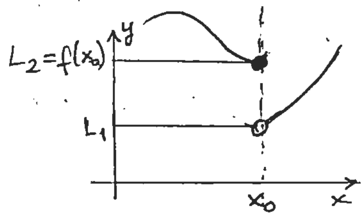
· Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per il dominio della funzione f e supponiamo che f sia definita in un intorno bucato di x_0. Si dice che la funzione f ha in x_0 una discontinuità di prima specie se esistono finiti i due limiti sinistro e destro in x_0, ma sono diversi tra loro:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad \text{entrambi finiti}$$

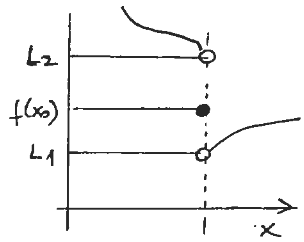
La funzione presenta un "salto" finito nel punto x_0 e il salto è costituito dalla differenza dei limiti e precisamente:

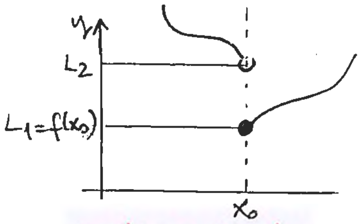
$$\text{salto in } x_0 = \lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_2 - L_1$$





continua da sx





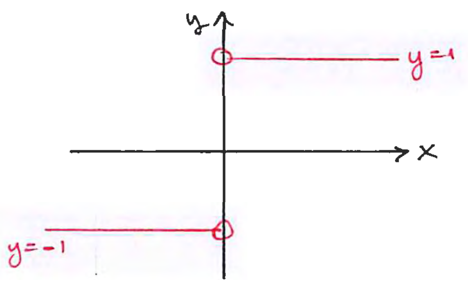
continua da dx

Esempio 1) $f(x) = \frac{x}{|x|}$

C.E : $\mathbb{R} - \{0\}$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$



La funzione presenta quindi un punto di discontinuità di prima specie in $x_0 = 0$.
Il salto si genera nel punto perchè a sinistra la funzione si avvicina a $x = 0$ assumendo un valore diverso da quello che assume avvicinandosi da destra.

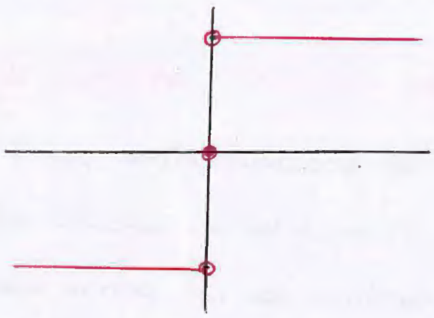
2) Consideriamo la funzione segno:

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases}$$

Tale funzione è definita su $\mathbb{R}$ e presenta in $x_0=0$ un punto di discontinuità di prima specie, poiché

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1$$

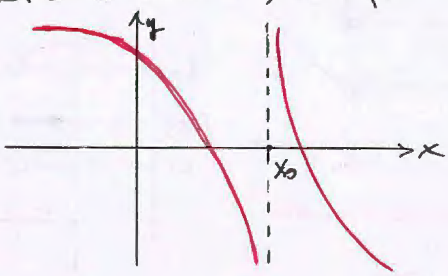
$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = +1$$



La funzione segno fa quindi un salto in $x=0$. (in cui vale 0)

Discontinuità di seconda specie (discontinuità essenziale)

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per il dominio della funzione f e supponiamo che f sia definita in un intorno bucato di x_0. Si dice che la funzione f ha in x_0 un punto di discontinuità di seconda specie se almeno uno dei due limiti, sinistro o destro, è infinito oppure non esiste.



$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \begin{cases} \nexists \\ \pm\infty \end{cases} \quad \vee \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \begin{cases} \nexists \\ \pm\infty \end{cases}$$

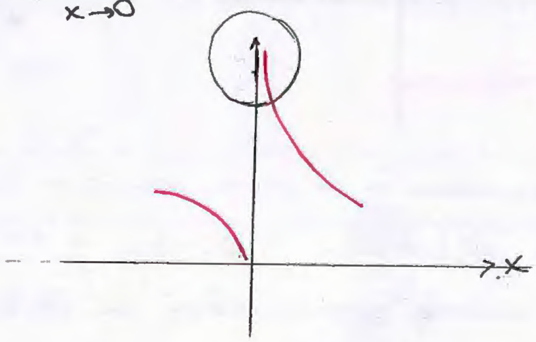
Esempi 1) $y = e^{1/x}$ C.E: $x \neq 0$

La funzione presenta un punto di discontinuità di seconda specie in $x_0=0$.

Infatti:

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty \Rightarrow \text{soddisfa la condizione}$$

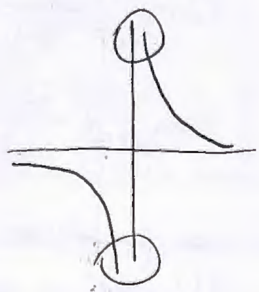
$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$



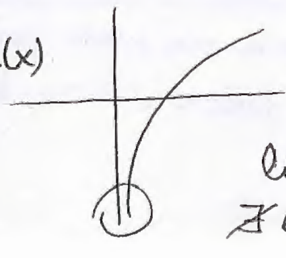
Altri esempi: 1) $y = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$



2) $y = \ln(x)$



$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\nexists \lim_{x\to 0^-} \ln(x)$$

Discontinuità di terza specie (discontinuità eliminabile)

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per il dominio della funzione f, e supponiamo che f sia definita in un intorno bucato di x_0. Si dice che la funzione f ha in x_0 un punto di discontinuità di terza specie se i due limiti sinistro e destro esistono finiti e sono uguali tra loro, ma non coincidono con la valutazione della funzione nel punto.

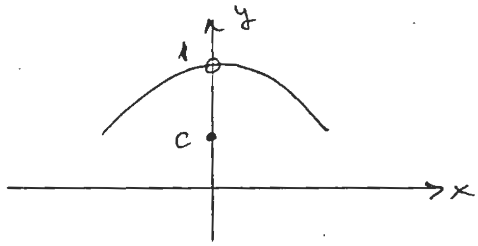
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ esistono finiti, ma } \neq f(x_0)$$

La discontinuità di terza specie viene anche detta discontinuità eliminabile, perchè partendo da f è possibile definire una nuova funzione $\tilde{f}$ in modo da eliminare la discontinuità. Detto c il comune valore dei due limiti sinistro e destro:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ c & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

Quando si elimina una discontinuità di terza specie si dice che si effettua un prolungamento per continuità nel punto.

Esempio 1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$



C.E : $x \neq 0$

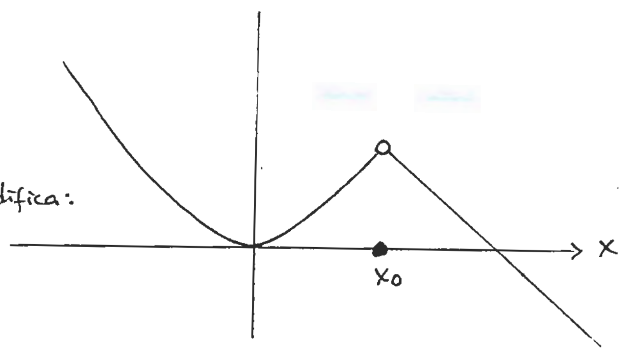
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0)$$

Definiamo:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases} \qquad \text{C.E} : \mathbb{R}$$

si può estendere ad una funzione continua in $x_0 = 0$ ponendo $c = f(x_0) = 1$.
Per qualunque altra scelta di c, la funzione presenterà discontinuità in $x_0 = 0$.

2) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < x_0 \\ 0 & \text{se } x = x_0 \\ 2 - x & \text{se } x > x_0 \end{cases}$



$x^2 = 2 - x$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2)(x-1) = 0$

$x = -2 \quad \vee \quad x = 1$

Se definiamo $\tilde{f}(x)$ con la modifica:
invece di $f(x_0) = 0$
se poniamo
$f(x_0) = 1$
si può eliminare la discontinuità.

Elenco delle funzioni continue

1) La funzione costante : $f(x) = k \in \mathbb{R}$
2) La funzione identità : $f(x) = x$
3) La funzione esponenziale : $f(x) = a^x$ con $0<a<1 \vee a>1$
4) La funzione potenza : $f(x) = x^p$ con $p \in \mathbb{R}$

(include la funzione radice come potenza con esponente fratto)

5) La funzione logaritmica : $f(x) = \log_a(x)$ con $0<a<1 \vee a>1$
6) La funzione segno : $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ (continua su C.E., tranne che in $x_0=0$)
7) " valore assoluto : $f(x) = |x|$
8) Funzioni trigonometriche
9) " iperboliche

Tali funzioni sono continue per $\forall x \in$ C.E.

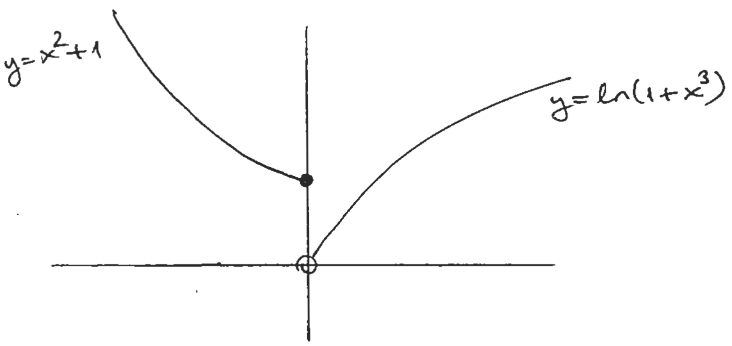
Esercizi sulla discontinuità :

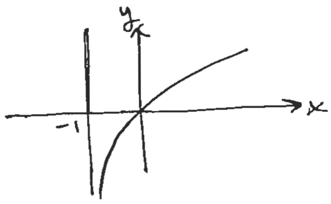
1) $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x^3) & x>0 \\ x^2+1 & x \le 0 \end{cases}$

C.E: $1+x^3>0$

$x^3>-1$

$x>-1$





$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln(1+x^3) = 0$

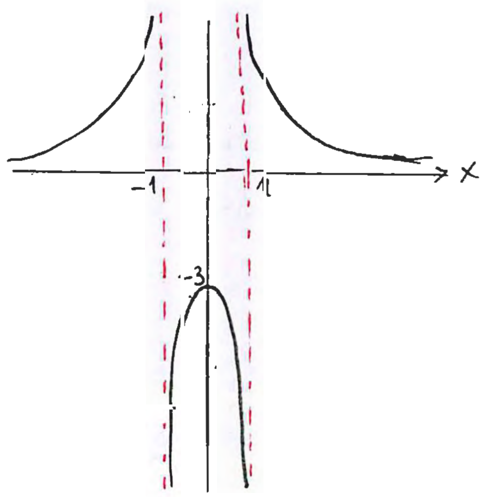
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2+1 = 1$

$\neq$

discontinuità di I° specie

continua da sx in $x=0$

2) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-1}$ C.E: $x \neq \pm 1$



$\lim_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+3}{x^2-1} = -\infty$; $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+3}{x^2-1} = +\infty$

$\lim_{x\to -1^-} \dfrac{x^2+3}{x^2-1} = +\infty$; $\lim_{x\to -1^+} \dfrac{x^2+3}{x^2-1} = -\infty$

Per entrambi i punti è soddisfatta la condizione (di discontinuità di II° specie) in $x_0 = \pm 1$