INTRODUZIONE AL CALCOLO INTEGRALE

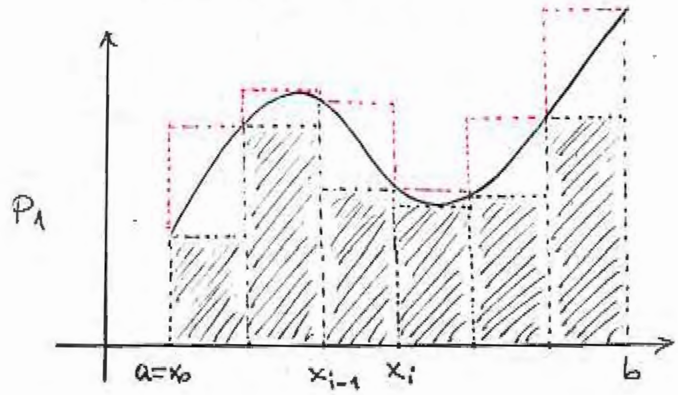
Che cosa vuol dire misurare l'area di una figura piana a contorno curvilineo?

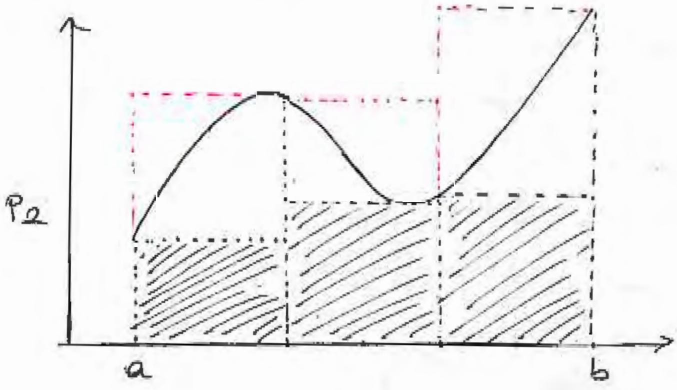
Introduciamo il concetto del calcolo integrale per il calcolo dell' "area sotto una curva", ossia dell'area della regione di piano compresa fra una data curva, l'asse x e le due rette verticali (due ascisse fissate).

Definizione: Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato. Chiamiamo partizione di $[a,b]$, e indichiamo con P, un sottoinsieme finito
(suddivisione)

$$\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$$

di punti di $[a,b]$ tali che $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$.





Chiaramente una partizione P di $[a,b]$ costituita da n+1 elementi individua n intervalli I_i, $i = 1, \dots, n$.

$$I_i = [x_{i-1}, x_i] \quad e \quad [a,b] = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$$

Date due partizioni P_1 e P_2 di $[a,b]$, diremo che P_1 è più fine di P_2. Date due partizioni, ne esiste sempre una più fine di entrambe (basta prenderne una più fine). Un modo per "misurare" quanto sia fine una partizione è quello di considerare la sua ampiezza $|P|$, cioè,

$$|P| = \max\{x_i - x_{i-1} : 1 \le i \le n\}$$

Per definire i plurirettangoli, si sceglie una partizione P di $[a,b]$ per individuare la base di ogni rettangolo. Ora serve una scelta opportuna delle altezze di ogni rettangolo. Nel caso di una funzione continua e non negativa definita in $[a,b]$, ci sono due scelte naturali: il massimo e il minimo della funz. (che esistono per il teorema di Weierstrass) in ogni sotto intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ relativo alla partizione P. Ma poiché il concetto che vogliamo introdurre, l'integrale, non servirà solo per le funzioni continue e non negative, facciamo una scelta leggermente più generale.

Definizione di Integrale di Riemann

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. L'idea è di "approssimare" l'area del trapezoide con delle unioni di rettangoli. Sia $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ una partizione di $[a,b]$. Ora costruiamo le due somme:

$$s(P,f) = s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$ (somma inferiore di f) relativa a P

$$S(P,f) = S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$ (somma superiore di f) relativa a P

dove $m_i = \inf \{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \}$

$M_i = \sup \{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \}$, $i = 1, \dots, n$

Le somme s_n e S_n misurano le aree delle regioni formati dai rettangoli rispettivamente "iscritti" e "circoscritti" al grafico e quindi rappresentano la stima inferiore o superiore (di ordine n) dall'area da calcolare. L'area del trapezoide è definita se questo procedimento di approssimazione dal basso e dall'alto individua al limite un unico numero:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} S_n = \text{area del trapezoide}$$

In questo caso la funzione si dice integrabile secondo Riemann nell' intervallo $[a,b]$ e il valore dell'area del trapezoide è detto integrale di Riemann di f in $[a,b]$ e si indica con

$$\int_a^b f(x)\,dx$$ (si legge integrale tra a e b di f in dx)

Formalizziamo ora il concetto di area. Sia $f \in \mathcal{R}(a,b)$: l'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann in un intervallo $I = [a,b]$, e $f \geq 0$ in $[a,b]$ e sia $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x)\}$. Allora si dice area di R il numero

$$\text{area } R = \int_a^b f(x)\,dx$$

Nel caso che $f \leq 0$, abbiamo:

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq 0\}$$

Se f è negativa allora $-f(x) \geq 0$, quindi abbiamo anche:

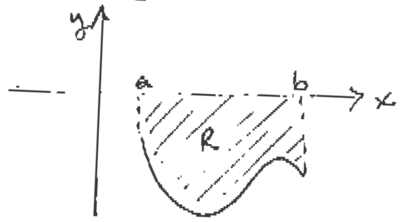
$$\tilde{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq -f(x)\}$$

$$-\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (-f(x))\,dx = \text{area}\ \tilde{R}$$

Poiché gli insiemi R e $\tilde{R}$ sono equivalenti, è naturale definire

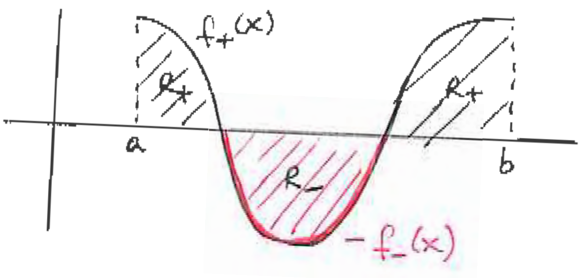
$$\text{area}\ R = -\int_a^b f(x)\,dx \quad , \text{ ovvero } \quad \int_a^b f(x)\,dx = -\text{area}\ R$$

Quindi integrale di una funzione non positiva rappresenta "meno" l'area della regione R.



$$\int_a^b f = -\text{area}\ R$$

Il caso generale:



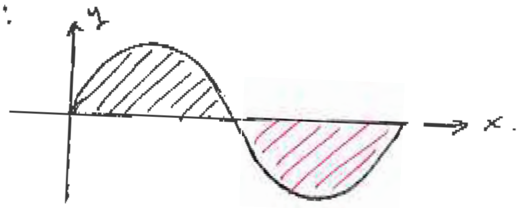
$$R_\pm = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ 0 \le y \le f_\pm(x)\}$$

$$\int_a^b f(x) = \int_a^b f_+(x)\,dx - \int_a^b f_-(x)\,dx$$

$$= \text{area}(R_+) - \text{area}(R_-)$$

Ad esempio, per simmetria si ha:

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$$



Condizioni di esistenza dell'integrale di Riemann

Teorema: Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora è integrabile secondo Riemann.

Teorema: Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è monotona, allora è integrabile.

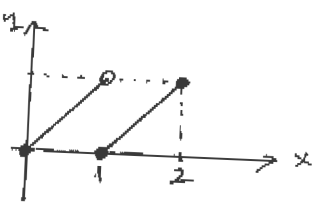
Teorema: Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è limitata, allora f è integrabile se e solo se $\forall \varepsilon > 0,\ \exists P_\varepsilon$ partizione di $[a,b]$ tale che $S(P_\varepsilon, f) - s(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$

* Notare che non tutte le funzioni limitate sono integrabili (ad esempio "la funzione di Dirichlet").

Teorema: Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Se f ha un numero finito di punti di discontinuità allora f è integrabile.

Esempio:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1) \\ x-1 & x \in [1,2] \end{cases}$$



è integrabile in $[0,2]$, dato che, è limitata e ha un solo punto di discontinuità.

Proprietà dell'integrale di Riemann

Teorema: Siano f, g integrabili in $[a,b]$. Allora valgono le proprietà seguenti:

1. **Linearità dell'integrale**: Se c_1, c_2 sono due costanti, allora anche la funzione $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ è integrabile, e vale l'identità:

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))\,dx = c_1 \int_a^b f(x)\,dx + c_2 \int_a^b g(x)\,dx$$

2. **Additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione**: Se $a \leq c \leq b$ allora f è integrabile anche su $[a,c]$ e $[c,b]$, e vale l'identità:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Convenzione: se $a<b$, si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

3. **Positività e monotonia dell'integrale**:

Se $f \geqslant 0$ in $[a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$, $a<b$

se $f \leq g$ in $[a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$, $a<b$

4. $|f|$ è integrabile in $[a,b]$, e vale l'identità:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \quad , a<b$$

5. Se $|f(x)| \leq M$, allora

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq M(b-a) \quad , a<b$$

6. $f(x) \cdot g(x)$ è integrabile in $[a,b]$.

Osservazione: Siano $a>0$ e f integrabile in $[-a,a]$

1) se f è dispari, allora $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

2) se f è pari, allora $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

Teorema della media: Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Allora esiste $c\in[a,b]$ tale che

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \qquad \left(\text{oppure } \int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(c)\right)$$

Il numero $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ si chiama **valor medio** di f su $[a,b]$.

Dimostrazione: Essendo f continua in $[a,b]$, per il teorema di Weierstrass, f ammette massimo (M) e minimo (m).

$$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b m\,dx \underset{\substack{m \text{ è minimo} \\ \text{prop. di monotonia}}}{\leq} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \underset{\substack{M \text{ è massimo} \\ \text{prop. di monotonia}}}{\leq} \frac{1}{b-a}\int_a^b M\,dx = M$$

Quindi il valore $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ è compreso tra il minimo ed il massimo di f. Per la proprietà dei valori intermedi delle funzioni continue tale valore è uguale a $f(c)$ per qualche $c\in[a,b]$.

La funzione integrale

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile in $[a,b]$. La funzione $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, che associa ad ogni $x\in[a,b]$ l'integrale di f tra a e x, cioè,

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad , \ \forall x\in[a,b]$$

si chiama **funzione integrale di f**.

Teorema fondamentale del calcolo integrale (1° parte)

Sia f continua in $[a,b]$. Allora la funzione integrale F è derivabile in ogni $x\in[a,b]$ e risulta,

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \qquad \left(\text{la funz. integrale di } f \text{ è una antiderivata di } f\right)$$

Questo teorema significa che ogni funzione continua ha una antiderivata (primitiva) e dice che l'integrazione e la derivazione sono operazioni inverse. Quindi il calcolo effettivo di un integrale è ricondotto alla ricerca di una antiderivata, che è l'operazione inversa della derivazione.

Esempio 1) Usando il teorema fondamentale del calcolo integrale, trovare

(a) $\frac{d}{dx}\int_{-p}^{x}\cos t\,dt$ (b) $\frac{d}{dx}\int_{0}^{x}\frac{1}{1+t^2}\,dt$

(a) $\frac{d}{dx}\int_{-p}^{x}\cos t\,dt=\cos x$ (b) $\frac{d}{dx}\int_{0}^{x}\frac{1}{1+t^2}\,dt=\frac{1}{1+x^2}$

Esercizi:

1) Trovare $\frac{dy}{dx}$ se $y=\int_{1}^{x^2}\cos t\,dt$

$y=\int_{1}^{u}\cos t\,dt$ dove $u=x^2$, applichiamo la regola della catena:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\left(\frac{d}{du}\int_{1}^{u}\cos t\,dt\right)\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=\cos u\cdot\frac{du}{dx}=\cos(x^2).2x=2x\cos x^2$$

2) Trovare $\frac{dy}{dx}$ se $y=\int_{1+3x^2}^{4}\frac{1}{2+t^2}\,dt$

$$\frac{d}{dx}\int_{1+3x^2}^{4}\frac{1}{2+t^2}\,dt=\frac{d}{dx}\left(-\int_{4}^{1+3x^2}\frac{1}{2+t^2}\,dt\right)=-\frac{d}{dx}\int_{4}^{1+3x^2}\frac{1}{2+t^2}\,dt$$

$$=-\frac{1}{2+(1+3x^2)^2}\cdot\frac{d}{dx}(1+3x^2)=-\frac{6x}{2+1+6x^2+9x^4}=-\frac{2x}{3x^4+2x^2+1}$$

Definizione: Si dice che una funzione F, derivabile in un intervallo I, è una **primitiva** (antiderivata) di f in I, se

$$F'(x)=f(x)\quad\text{per ogni } x\in I.$$

Ad esempio, $F(x)=x^2$ è una primitiva di $f(x)=2x$ e

$F(x)=\sin x$ è una primitiva di $f(x)=\cos(x)$, su tutto l'asse reale.

Evidentemente se F è una primitiva di f, lo è anche $F+c$ dove c è una costante; d'altra parte se F e G sono due primitive di f in I allora $F'-G'=0$ in I, ossia $(F-G)'=0$ quindi $F-G=$costante. Ne segue che se si conosce una primitiva F di f, tutte le altre sono della forma $F+c$, $c\in\mathbb{R}$.

Teorema: Siano F e G funzioni primitive nell'intervallo I della medesima $f: I \to \mathbb{R}$. Allora esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che

$$F(x) = G(x) + C \quad \text{per ogni } x \in I.$$

Per dimostrarlo, è sufficiente porre $H(x) = F(x) - G(x)$, notare che $F'(x) - G'(x) = 0$, ossia $(F(x) - G(x))' = 0$, cioè, $H'(x) = 0$ e ricordare che se una funzione ha derivata nulla in un intervallo, allora è costante.
(il fatto che, se una funzione ha derivata nulla in un intervallo, allora è costante, è una conseguenza del teorema di Lagrange)

Teorema fondamentale del calcolo integrale (2° parte)

Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, e F è una sua primitiva su $[a,b]$, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Per indicare $F(b) - F(a)$ si usa comunemente il simbolo $[F(x)]_a^b$ o $F(x)\Big|_a^b$.

Ad esempio, si voglia calcolare $\int_0^1 x^2 dx$;

Poiché $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$, $F(x) = \frac{x^3}{3}$ è una primitiva di x^2 in $[0,1]$, perciò

$$\int_0^1 x^2 dx = \underbrace{\frac{x^3}{3}\Big|_0^1}_{F(1)-F(0)} = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$$

Dimostrazione: Supponiamo che $G(x)$ è una primitiva di f in $[a,b]$, in modo tale che

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \text{(la funz. integrale)}$$

(per la prima parte del teorema fondamentale).

Se F è una primitiva di f in $[a,b]$ allora possiamo scrivere:

$$F(x) = G(x) + C \quad \text{(per il teorema precedente)}$$

Ora scriviamo

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= G(b) + C - (G(a) + C) \\ &= G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t)\,dt - \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{0} = \int_a^b f(t)\,dt \end{aligned}$$

Questo teorema dice che si può calcolare qualunque integrale definito di qualunque funzione continua senza considerare i limiti delle somme di Riemann; purché si trovi una primitiva di f. Quindi il teorema riconduce il calcolo di $\int_a^b f(x)dx$ (con f continua) alla determinazione dell'insieme delle primitive di f.

Calcolo di Integrali Indefiniti e Definiti

L'insieme di tutte le primitive di f prende il nome di integrale indefinito di f, e si indica con il simbolo,

$$\int f(x)\,dx$$

La notazione si usa talvolta per indicare una singola primitiva. Invece,

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

indica l'integrale di f in $[a,b]$, detto anche integrale definito di f in $[a,b]$.

Ci occupiamo ora dei metodi di integrazione, ossia dei metodi per trovare una primitiva di una funzione data (integrazione indefinita) e quindi per calcolarne il suo integrale definito.

La tabella di primitive (delle funzioni elementari):

FUNZIONE	PRIMITIVA
k	kx
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $(\alpha \neq -1)$
$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$	$\tan x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$

FUNZIONE	PRIMITIVA
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$ $(a>0, a\neq 1)$
e^{kx} $(k \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$	$\frac{1}{k}e^{kx}$

Nella tabella, quella fornita è una delle primitive. Per scrivere l'integrale indefinito, come insieme di tutte le primitive, occorre aggiungere sempre una costante arbitraria, ad esempio:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

Integrazione per scomposizione

$$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x))\, dx = c_1 \int f(x)dx + c_2 \int g(x)dx$$

Integrazione per sostituzione

Sia F una primitiva di f in un intervallo I, cioè $F'(t) = f(t)$ per ogni $t \in I$. Sia ora $t = \varphi(x)$ una funzione derivabile con continuità su un intervallo $[a,b]$ tale che $\varphi(a,b) \subset I$. Abbiamo allora:

$$\frac{d}{dx} F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

e cioè:

$$\begin{array}{ccc} F(t) & & \Phi(x) = F(\varphi(x)) \\ \text{primitiva di} & \Longleftrightarrow & \text{primitiva di} \\ f(t) & & f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \end{array}$$

Ne segue la formula (di integrazione per sostituzione)

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx = \int f(t)\, dt \quad , (\varphi(x) = t \ , \ \varphi'(x)dx = dt)$$

La versione per l'integrale definito è la seguente:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, dt \quad , (\varphi(x) = t \ , \ \varphi'(x)\, dx = dt)$$

$$x \in [a,b] \Rightarrow t = \varphi(x) \in [\varphi(a), \varphi(b)].$$

Esempi di integrazione

1. $$\int (4x^2 + 5x + 1)\, dx = 4\int x^2 dx + 5 \int x\, dx + \int 1\, dx$$
$$= 4 \cdot \frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2} + x + C$$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

Poniamo $u=e^x$ $\qquad x=0 \Rightarrow u=e^0=1$

$du=e^x dx \Rightarrow dx=\frac{du}{u}$ $\qquad x=1 \Rightarrow u=e^1=e$

$$\int_1^e \frac{1}{u+u^{-1}}\cdot\frac{1}{u}\cdot du = \int_1^e \frac{1}{u^2+1}\,du = \arctan u\Big|_1^e = \arctan(e)-\arctan(1)$$

$$=\arctan(e)-\frac{\pi}{4}$$

3. $\displaystyle\int \tan(x)\,dx$

$$=\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{-du}{u} = -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|u|+c = -\ln|\cos x|+c$$

$u=\cos x$

$du=-\sin x\,dx$

4. $\displaystyle\int_{-1}^1 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

$u=x^3+1$ $\qquad x=-1 \Rightarrow u=x^3+1=0$

$du=3x^2dx$ $\qquad x=1 \Rightarrow u=x^3+1=2$

$$\int_0^2 \sqrt{u}\,du = \int_0^2 u^{1/2}du = \frac{u^{3/2}}{3/2}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}\left(2^{3/2}-0^{3/2}\right) = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-0) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

5. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot\theta\cdot\operatorname{cosec}^2\theta\,d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot\theta\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}\,d\theta$

$u=\cot\theta$ $\qquad$ se $\theta=\pi/4 \Rightarrow u=\cot\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

$du=-\frac{1}{\sin^2\theta}\,d\theta$ $\qquad$ se $\theta=\pi/2 \Rightarrow u=\cot\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

$$=\int_1^0 -u\,du = -\int_1^0 u\,du = \int_0^1 u\,du$$

$$=\frac{u^2}{2}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\left(1^2-0^2\right) = \frac{1}{2}$$

6. $\displaystyle\int_{1/2e}^{1/e} \frac{dx}{x\ln x}$

$u = \ln x$ $\qquad$ se $x = \frac{1}{2e} \Rightarrow u = \ln\left(\frac{1}{2e}\right) = \cancel{\ln 1} - (\ln 2 + \ln e) = -\ln 2 - 1$

$du = \frac{1}{x}dx$ $\qquad$ se $x = \frac{1}{e} \Rightarrow u = \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln e^{-1} = -1$

$$\int_{-\ln 2-1}^{-1} \frac{1}{u}\,du = \ln|u| \Big|_{-\ln 2-1}^{-1} = \ln|-1| - \ln|-(\ln 2+1)| = \cancel{\ln 1} - \ln(\ln 2+1)$$
$$= -\ln(\ln 2+1)$$

Le Formule Fondamentali per l'integrazione

1) $\int dx = x + c$

2) $\int k\,dx = kx + c$ per k costante

3) $\int (dx+dy) = \int dx + \int dy = x+y+c$

4) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ $\quad (n \neq -1)$

5) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$

6) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

7) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

8) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$,
$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$

9) $\int \mathrm{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$
$\int \mathrm{cosec}\,x\,dx = \ln|\mathrm{cosec}\,x - \cot x| + c$

10) $\int \sec x \cdot \tan x\,dx = \sec x + c$

11) $\int \mathrm{cosec}\,x \cdot \cot x\,dx = -\mathrm{cosec}\,x + c$

12) $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c$
$= \ln|\sec x| + c$

13) $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + c$
$= -\ln|\mathrm{cosec}\,x| + c$

14) $\int e^x dx = e^x + c$

15) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

19) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$= -\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

16) $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

18) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + c$

17) $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

20) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$

21) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

Integrazione delle funzioni razionali

Diamo ora un'idea schematica di come si calcoli in generale l'integrale di una funzione razionale:

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx$$

dove P_n e Q_m sono polinomi di grado n, m, rispettivamente.

Se $n \geq m$, per prima cosa si esegue la divisione di polinomi; questo permette di riscrivere la funzione razionale come somma di un polinomio (che si integra immediatamente), più una funzione razionale con lo stesso denominatore di partenza, e il numeratore di grado inferiore.

Esempio: $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x^2+x+1}\,dx$

$$\begin{array}{rrr|l}
\cancel{x^3} & & +\cancel{x} & x^2+x+1 \\
-\cancel{x^3} & -x^2 & -\cancel{x} & x-1 \\
\hline
 & -\cancel{x^2} & & \\
 & \cancel{x^2} & +x+1 & \\
\hline
 & & x+1 &
\end{array}$$

$$x^3+x = x-1+\frac{x+1}{x^2+x+1}$$

$$\int (x-1)\,dx + \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - x + c + I$$

$$u = x^2+x+1$$
$$du = (2x+1)\,dx$$

$$I = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx \qquad \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}\cdot\tan^{-1}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

1) Se il denominatore è di primo grado: l'integrale si calcola mediante logaritmo, ad esempio:

$$\int \frac{2}{3x+5}\,dx = 2\int \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{3} = \frac{2}{3}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{2}{3}\ln|3x+5| + c$$

$u = 3x+5$

$du = 3\,dx$

Quindi la formula generale è la seguente:

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$$

2) Se il denominatore è di secondo grado (e il numeratore di grado ≤ 1): esistono 3 casi, a seconda del segno del discriminante del denominatore.

A. Il denominatore ha due radici distinte. La frazione si scompone in fratti semplici e si integra poi mediante somma di logaritmi.

Esempi: 1) $$\int \frac{x+2}{x^2+x-6}\,dx = \int \frac{x+2}{(x-2)(x+3)}\,dx$$

Scriviamo: $$\frac{x+2}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$$

$(x+3)$ $(x-2)$

$A(x+3) + B(x-2) = x+2$

$Ax + 3A + Bx - 2B = x+2$

$x(A+B) + 3A - 2B = x+2 \Rightarrow \begin{cases} A+B = 1 \\ 3A-2B = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2A+\cancel{2B} = 2 \\ 3A-\cancel{2B} = 2 \end{cases}$

$5A = 4 \Rightarrow A = 4/5$

$A+B = 1 \Rightarrow B = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

Quindi l'integrale di partenza è uguale a:

$$= \frac{4}{5}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+3}\,dx = \frac{4}{5}\ln|x-2| + \frac{1}{5}\ln|x+3| + c$$

2) $$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{1}{(x-2)(x+2)}\,dx = \frac{1}{4}\left[\int \frac{1}{x-2}\,dx - \int \frac{1}{x+2}\,dx\right] = \frac{1}{4}\left[\ln|x-2| - \ln|x+2|\right] + c$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$$

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow \begin{cases} A+B = 0 \\ 2A-2B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2A+\cancel{2B} = 0 \\ 2A-\cancel{2B} = 1 \end{cases}$$

$4A = 1 \Rightarrow A = 1/4 \Rightarrow B = -\frac{1}{4}$

B. Il denominatore è un quadrato perfetto: Mediante sostituzione ci si riconduce alla somma di potenze (con esponente positivo o negativo), che si integra immediatamente:

Esempio: $\int \frac{x+1}{(3x+2)^2}\,dx$, per sostituzione

$u = 3x+2 \Rightarrow x = \frac{u-2}{3}$
$du = 3\,dx$

$$\int \frac{x+1}{(3x+2)^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{u-2}{3}+1}{u^2}\cdot du = \frac{1}{9}\int \frac{u-2+3}{u^2}\,du = \frac{1}{9}\int \frac{u+1}{u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{9}\left[\int \frac{1}{u}\,du + \underbrace{\int \frac{1}{u^2}\,du}_{\underbrace{u^{-2}}_{-u^{-1}}}\right] = \frac{1}{9}\left(\ln|3x+2| - \frac{1}{3x+2}\right) + c$$

① $\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1}x + c$

② $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

C. Il denominatore non si annulla mai:

Esempi 1) $\int \frac{dx}{x^2+3} \overset{①}{=} \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x^2}{3}+1\right)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$

$\overset{②}{=} \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$

$u = \frac{x}{\sqrt{3}}$ $\quad du = \frac{1}{\sqrt{3}}dx$ $\quad = \frac{1}{3}\int \frac{\sqrt{3}\,du}{u^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$ $\quad \frac{\sqrt{3}}{3} \to \frac{1}{\sqrt{3}}$

2) $\int \frac{1}{x^2+2x+4}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+(\sqrt{3})^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$

3) $\int \frac{x}{x^2+2x+4}\,dx$

La derivata del denominatore: $2x+2$; $x = \frac{1}{2}(2x+2) - 1$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+2x+4}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+4) - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$u = x^2+2x+4$
$du = (2x+2)\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du$

$= \frac{1}{2}\ln|u| + c$

$= \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+4| + c$

$x^2+2x+4 = \underbrace{(x+1)^2}_{>0} + \underbrace{3}_{>0} > 0$

3) Se il denominatore è un polinomio di grado maggiore di due:

è sempre possibile scomporlo in un prodotto di (potenze di) fattori di primo grado, oppure di secondo grado irriducibili. Fatto questo, si scompone la frazione in fratti semplici, a cui si applicano i discorsi precedenti.

Esempi 1) $\displaystyle\int \frac{2x^2+3x-1}{x^3+2x^2+x+2}\,dx$

Denominatore: $x^3+2x^2+x+2 = x^2(x+2)+x+2 = (x+2)(x^2+1)$

Scomposto il denominatore, si scompone il quoziente in fratti semplici:

$$\frac{2x^2+3x-1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Mettiamo ora a denominatore comune, si trova:

$$A(x^2+1)+(Bx+C)(x+2) = 2x^2+3x-1$$

$$Ax^2+A+Bx^2+2Bx+Cx+2C = 2x^2+3x-1$$

$$(A+B)x^2+(2B+C)x+A+2C = 2x^2+3x-1$$

$$\left\{\begin{array}{l} A+B=2 \\ 2B+C=3 \\ -1/\ A+2C=-1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \cancel{A}+B=2 \\ -\cancel{A}-2C=1 \\ \hline B-2C=3 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} B-2C=3 \\ 2/\ 2B+C=3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} B-\cancel{2C}=3 \\ 4B+\cancel{2C}=6 \\ \hline 5B=9 \\ B=9/5 \end{array}$$

$$A+B=2 \Rightarrow A+\frac{9}{5}=2 \Rightarrow A=2-\frac{9}{5}=\frac{1}{5}$$

$$2B+C=3 \Rightarrow C=3-2\cdot\frac{9}{5}=3-\frac{18}{5}=-\frac{3}{5}$$

Perciò:

$$\int \frac{2x^2+3x-1}{(x+2)(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+2}\,dx + \frac{1}{5}\int \frac{9x-3}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\ln|x+2| + \frac{9}{5}\underbrace{\int \frac{x}{x^2+1}\,dx}_{*} - \frac{3}{5}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$*$ $u=x^2+1$

$du=2x\,dx$

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u|+c$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\underbrace{x^2+1}_{>0 \text{ sempre}}|+c$$

$$= \frac{1}{5}\ln|x+2| + \frac{9}{10}\ln(x^2+1) - \frac{3}{5}\tan^{-1}(x)+c$$

2) $\int \frac{x+1}{x^2(x+3)}\,dx$

Si scompone: $\frac{x+1}{x^2(x+3)} = \frac{Ax+B}{x^2} + \frac{C}{x+3}$

$(Ax+B)(x+3) + Cx^2 = x+1$

$Ax^2+3Ax+Bx+3B+Cx^2 = x+1$

$(A+C)x^2 + (3A+B)x + 3B = x+1$

$$\left.\begin{array}{l} A+C=0 \\ 3A+B=1 \\ 3B=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} C=-A \\ A=\frac{1-B}{3} \\ B=1/3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} C=-\frac{2}{9} \\ A=\frac{1-1/3}{3}=\frac{2}{9} \\ B=1/3 \end{array}$$

$$\int \frac{x+1}{x^2(x+3)}dx = \frac{2}{9}\int \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2}dx - \frac{2}{9}\int \frac{1}{x+3}dx$$

x^{-2}

$$= \frac{2}{9}\ln|x| - \frac{1}{3x} - \frac{2}{9}\ln|x+3| + c$$

$$= \frac{2}{9}\left(\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|\right) - \frac{1}{3x} + c$$

3) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x^2-x+1)}\,dx$

Il fattore (x^2-x+1) è irriducibile. Si scompone:

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x^2-x+1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

In Generale:

1) $\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)^3} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + \frac{C}{(x-b)^2} + \frac{D}{(x-b)^3}$

2) $\frac{P(x)}{(x^2+a)(x+b)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+b}$

3) $\frac{P(x)}{(x^2+ax+c)^2(x-b)} = \frac{Ax+B}{(x^2+ax+c)} + \frac{Cx+D}{(x^2+ax+c)^2} + \frac{E}{x-b}$

4) $\frac{P(x)}{(x^2+a)(x-b)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+a} + \frac{C}{x-b} + \frac{D}{(x-b)^2}$

Un'altra soluzione dell'esempio

$$\int \frac{x+1}{(3x+2)^2}\,dx$$ si scompone la frazione in fratti semplici ;

$$\frac{x+1}{(3x+2)^2} = \frac{A}{3x+2} + \frac{B}{(3x+2)^2}$$

$(3x+2)$

$3Ax + 2A + B = x+1$

$3A = 1 \Rightarrow A = 1/3$

$2A+B=1 \Rightarrow B = 1-2A = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$$\int \frac{x+1}{(3x+2)^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{3x+2}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{(3x+2)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x+2|\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\underbrace{\int (3x+2)^{-2}\,dx}_{\frac{(3x+2)^{-1}}{-1}\cdot\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{9}\left[\ln|3x+2| - \frac{1}{3x+2}\right] + C$$

Esercizi 1) $$\int \frac{dx}{(x^2-1)^2} = \int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

$$A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-1)^2 + D(x-1)^2 = 1$$

$A = 1/4$, $B = 1/4$, $C = -1/4$, $D = 1/4$

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

$\nearrow (x-1)^{-2}$ $\nearrow (x+1)^{-2}$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \ln|x+1| - \frac{1}{x+1}\right] + C$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)\right] + C$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{2x}{x^2-1}\right] + C$$

2) $I = \int \frac{x+4}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1+9}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx}_{I_1} + 9\underbrace{\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx}_{I_2}\Big]$

$u = x^2-x+1$

$du = (2x-1)\,dx$

$x+4 = \underbrace{\frac{1}{2}(2x-1)}_{x-\frac{1}{2}} + \frac{9}{2} = \frac{1}{2}(2x-1+9)$

$I_1 = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln(x^2-x+1)$

$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

$u = x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$

$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$I_2 = \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$

$I = \frac{1}{2}\left[\ln(x^2-x+1) + 6\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\right] + C$

Integrazione per parti

Se due funzioni u e v sono derivabili in $[a,b]$ si ha

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

ossia

$$uv' = (uv)' - u'v$$

$$u\cdot\frac{dv}{dx} = (uv)' - \frac{du}{dx}\cdot v$$

$$\int u\cdot\frac{dv}{\cancel{dx}}\cdot\cancel{dx} = \int (uv)' - \int v\cdot\frac{du}{\cancel{dx}}\cdot\cancel{dx}$$

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\cdot du}$$

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

Un'altra versione:

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx$$

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = \Big[u(x)\cdot v(x)\Big]_a^b - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx$$

Esercizi 1) $\int x \sin x \, dx$

$u = x \qquad dv = \sin x \, dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$= -x\cos x + \int \cos x \, dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

[se si sceglie $u = \sin x \quad dv = x\,dx$

$du = \cos x \, dx \quad v = \frac{x^2}{2}$

$$= \frac{x^2}{2}\sin x - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x \, dx$$

(più complicato dell'integrale di partenza)]

2) $$\int \ln(1+x)\,dx = x\ln(1+x) - \underbrace{\int x \frac{1}{1+x}\,dx}$$

$u = \ln(1+x) \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{1+x}\,dx \qquad v = x$

$$\int \frac{x}{1+x}\,dx = \int \frac{1+x-1}{1+x}\,dx = \int\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$= x - \ln|1+x|$$

$$= x\ln(1+x) - x + \ln|1+x| + C$$

3) $$I = \int e^x \sin x \, dx = -e^x\cos x + \underbrace{\int e^x \cos x \, dx}_{I_1}$$

$u = e^x \qquad dv = \sin x \, dx$

$du = e^x dx \qquad v = -\cos x$

$u = e^x \qquad dv = \cos x \, dx$

$du = e^x dx \qquad v = \sin x$

$$I_1 = e^x \sin x - \underbrace{\int e^x \sin x \, dx}_{I}$$

$$I = -e^x\cos x + e^x \sin x - I$$

$$2I = e^x(\sin x - \cos x) \Rightarrow I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$

II metodo

$u = \sin x \qquad dv = e^x dx$

$du = \cos x \, dx \qquad v = e^x$

$$\Big\} \quad I = e^x \sin x - \underbrace{\int e^x \cos x \, dx}_{I_1}$$

$$I_1 = \int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \underbrace{\int e^x \sin x \, dx}_{I}$$

$u = \cos x \qquad dv = e^x dx$

$du = -\sin x \, dx \qquad v = e^x$

$$I = e^x \sin x - e^x \cos x - I$$

$$2I = e^x(\sin x - \cos x) \Rightarrow I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$

4) $\int \tan^{-1}(x)\,dx = uv - \int v\,du$

$u = \tan^{-1}(x)$ $\qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{1+x^2}\,dx$ $\qquad v = x$

$= x\tan^{-1}(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\tan^{-1}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$

$\left.\begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ dt = 2x\,dx \end{array}\right\} \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}$

5) $I = \int x^2 e^x\,dx = x^2e^x - 2\underbrace{\int x e^x\,dx}_{I_1}$

$u = x^2$ $\qquad dv = e^x dx$

$du = 2x\,dx$ $\qquad v = e^x$

$I_1 = \int x e^x\,dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$

$u = x$ $\qquad dv = e^x dx$

$du = dx$ $\qquad v = e^x$

$I = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x = e^x(x^2 - 2x + 2) + c$

6) $\int_0^1 x e^{-x}\,dx = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \underbrace{\int_0^1 e^{-x}\,dx}_{-e^{-x}\big|_0^1} = -e^{-x}(x+1)\Big|_0^1 = -\frac{1}{e^x}(x+1)\Big|_0^1$

$u = x$ $\qquad dv = e^{-x}dx$

$du = dx$ $\qquad v = -e^{-x}$

$= -\left(\frac{1}{e}\cdot 2 - 1\right) = 1 - \frac{2}{e}$

7) $\int_0^\pi x\cos x\,dx = x\sin x\Big|_0^\pi - \underbrace{\int_0^\pi \sin x\,dx}_{-\cos x\big|_0^\pi} = x\sin x + \cos x\Big|_0^\pi$

$u = x$ $\qquad dv = \cos x\,dx$

$du = dx$ $\qquad v = \sin x$

$= (\pi\cancel{\sin\pi} + \underbrace{\cos\pi}_{-1}) - (\cancel{0.\sin 0} + \underbrace{\cos 0}_{1})$

$= -1 - 1 = -2$

8) $I = \int x^3 \ln^2 x\,dx = \frac{1}{4}x^4\ln^2 x - \frac{1}{2}\overbrace{\int x^3 \ln x\,dx}^{I_1}$

$u = \ln^2 x$ $\qquad dv = x^3 dx$ $\qquad u = \ln x$ $\qquad dv = x^3 dx$

$du = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}$ $\qquad v = \frac{x^4}{4}$ $\qquad du = \frac{1}{x}dx$ $\qquad v = \frac{x^4}{4}$

$I_1 = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{4}\frac{x^4}{4}$

$I = \frac{x^4}{4}\left(\ln^2 x - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{8}\right) + c$

Esercizi (integrazione per sostituzione)

1) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sin^3 x \cdot \cos^2 x \, dx$

$\sin^3 x \cdot \cos^2 x = \sin x \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x = \sin x\,(1-\cos^2 x)\cos^2 x$

$u = \cos x$ $\qquad x = 0 \Rightarrow u = 1$

$du = -\sin x\, dx$ $\qquad x = \pi/3 \Rightarrow u = 1/2$

$$= -\int_1^{1/2} (1-u^2)u^2\, du = \int_{1/2}^{1} (u^2 - u^4)\, du = \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5}\right)\Bigg|_{1/2}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{8 \cdot 3} - \frac{1}{32 \cdot 5}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{24} + \frac{1}{160}$$

2) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos x}\, dx = -\int_{3/2}^{1} \frac{du}{u} = \int_1^{3/2} \frac{1}{u}\, du = \ln|u|\Big|_1^{3/2}$

$u = 1 + \cos x$ $\qquad x = \pi/3 \Rightarrow u = 3/2$ $\qquad = \ln\frac{3}{2} - \overset{0}{\ln 1}$

$du = -\sin x\, dx$ $\qquad x = \pi/2 \Rightarrow u = 1$ $\qquad = \ln\frac{3}{2}$

Funzioni razionali di $\sin x, \cos x$ (sostituzione trigonometriche)

$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $x = 2\tan^{-1}(t)$, $dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$

La sostituzione è utile in forza delle seguenti identità trigonometriche:

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ dove $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Questo metodo porta, in genere, a calcoli laboriosi, e va utilizzato perciò solo quando non sembra esservi una via più semplice.

3) $\displaystyle\int \frac{\sin x - 5\cos x}{3+\sin x}\, dx$

$$I = \underbrace{\int \frac{\sin x}{3+\sin x}\, dx}_{I_1} - 5\overbrace{\underbrace{\int \frac{\cos x}{3+\sin x}}_{\substack{u = 3+\sin x \\ du = \cos x\, dx}}\, dx}^{I_2} \; ; \; I_2 = \int \frac{du}{u} = \ln\underbrace{|3+\sin x|}_{>0}$$

$$I_1 = \int \frac{\sin x}{3+\sin x}\, dx = \int \frac{3+\sin x - 3}{3+\sin x}\, dx = \int \left(1 - \frac{3}{3+\sin x}\right) dx = x - 3\overbrace{\int \frac{1}{3+\sin x}\, dx}^{I_3}$$

Calcoliamo ora

$$I_3 = \int \frac{1}{3+\sin x}\,dx$$

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad ; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$I_3 = \int \frac{1}{3+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = 2\int \frac{1}{\frac{3t^2+2t+3}{\cancel{1+t^2}}} \cdot \frac{1}{\cancel{1+t^2}}\,dt$$

$$= 2\int \frac{1}{3t^2+2t+3}\,dt = 2\int \frac{dt}{3\left(t^2+\frac{2}{3}t+1\right)} = \frac{2}{3}\int \frac{1}{\underbrace{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2}_{\left(t^2+\frac{2}{3}t+\frac{1}{9}\right)+\frac{8}{9}}+\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}\,dt$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(t+\frac{1}{3}\right)\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)\right)\right)$$

Quindi:

$$I = x - \frac{3}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)\right)\right) - 5\ln(3+\sin x) + C$$

4) $$\int \frac{1}{4\sin x + 3\cos x}\,dx$$ (da fare a casa!) $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $x = 2\tan^{-1} t$

$$\int \frac{1}{4\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)+3\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = 2\int \frac{\cancel{1+t^2}}{\underset{-3\left(t^2-\frac{8t}{3}-1\right)}{-3t^2+8t+3}} \cdot \frac{1}{\cancel{1+t^2}}\,dt = -\frac{2}{3}\int \frac{1}{\left(t-\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{5}{3}\right)^2}\,dt \qquad \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$$

$$\left(t-\frac{4}{3}\right)^2 = t^2-\frac{8}{3}t+\frac{16}{9}-\frac{25}{9}$$

$$= -\frac{2}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{10}\ln\left|\frac{t-\frac{4}{3}-\frac{5}{3}}{t-\frac{4}{3}+\frac{5}{3}}\right| = -\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-3}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{3}}\right| + c$$

Integrali Impropri

Definizione: Sia f una funzione continua su $[a,+\infty)$. Chiamiamo *integrale improprio* della funzione f il limite

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_a^R f(x)\,dx$$

se esiste finito. In tale caso si dice che l'integrale converge. Se il limite è infinito si dice che l'integrale diverge. Se il limite non esiste si dice che l'integrale è indeterminato.

L'integrale improprio rappresenta l'estensione del concetto di integrale definito per funzioni che presentino un numero finito di punti discontinuità nell'intervallo di integrazione, oppure per funzioni il cui intervallo di integrazione risulti illimitato.

Gli integrali impropri si classificano in:

1. Integrali impropri di 1° tipo (o specie): se almeno uno degli estremi di integrazione non è finito

L'integrale improprio di prima specie di una funzione continua f su $[a,+\infty)$:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_a^R f(x)\,dx$$

se f è continua su $(-\infty, b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^b f(x)\,dx$$

se f è continua su $\mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

(L'integrale è convergente se e solo se entrambi integrali sono convergenti)

ossia, per un qualunque costante c,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)\,dx$$

Esempio 1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_1^R \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$

$\displaystyle\int_1^R \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$, applichiamo l'integrazione per parti:

$u = \ln x \qquad dv = x^{-2}dx$

$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = -\frac{1}{x}$

$$= -\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^R + \int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x}\Big|_1^R = -\frac{1}{x}(\ln x + 1)\Big|_1^R$$

$$= -\frac{1}{R}(\ln R + 1) + \underbrace{(\underbrace{\ln 1}_{0} + 1)}_{1} = 1 - \frac{1}{R}(1 + \ln R)$$

$$\lim_{R\to+\infty}\left(1 - \overset{\to 0}{\frac{1}{R}} - \frac{\ln R}{R}\right) = 1 - 0 = 1$$

$\ln R \ll R$

Poiché il limite esiste finito, concludiamo che l'integrale improprio converge a 1.

2) $$\int_{-\infty}^{0} x\,dx = \lim_{R\to-\infty}\int_{R}^{0} x\,dx = \lim_{R\to-\infty} \frac{x^2}{2}\Big|_R^0 = \lim_{R\to-\infty}\left(0-\frac{R^2}{2}\right) = -\infty$$

L'integrale improprio diverge negativamente.

3) $$\int_{5}^{+\infty} \cos(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{5}^{R}\cos(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \sin x\Big|_5^R = \lim_{R\to+\infty} \sin(R)-\sin(5)$$, non esiste (oscillante)

Poiché il limite non esiste, allora l'integrale non esiste (indeterminato).

4) $$\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot e^{-x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} xe^{-x^2}dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} xe^{-x^2}dx$$, dove c è una costante qualunque

$$\int_{a}^{c} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_{-a^2}^{-c^2} e^{u}du = -\frac{1}{2}\,e^{u}\Big|_{-a^2}^{-c^2} = -\frac{1}{2}\left(e^{-c^2}-e^{-a^2}\right)$$

$u=-x^2$ $\quad x=a \Rightarrow u=-a^2$

$du=-2x\,dx$ $\quad x=c \Rightarrow u=-c^2$

$$\int_{c}^{b} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\left(e^{-b^2}-e^{-c^2}\right)$$

$$I_p = \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{2}\left(e^{-c^2}-e^{-a^2}\right) + \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{2}\left(e^{-b^2}-e^{-c^2}\right)$$

$$= \cancel{-\frac{1}{2}e^{-c^2}} + \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{e^{a^2}}}_{0} + \cancel{\frac{1}{2}e^{-c^2}} - \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{b^2}}}_{0} = 0$$

Poiché il limite esiste finito, concludiamo che l'integrale improprio converge a zero.

Esempio: Calcoliamo

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx$$

1. Caso $p=1$;

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{1}^{R}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \ln|x|\Big|_1^R = \lim_{R\to+\infty} \ln R - \underbrace{\ln 1}_{0} = +\infty$$

Quindi l'integrale improprio è divergente.

2. Caso $p\neq 1$;

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_1^R x^{-p}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_1^R = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{1-p}\left(R^{1-p}-1\right)$$

Dunque

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{1-p}\left(R^{1-p}-1\right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } p<1 \\ \frac{1}{p-1} & \text{se } p>1 \end{cases}$$

(se $p>1$, allora $R^{1-p} = \frac{1}{R^{p-1}}$ dove $p-1>0$ quindi $R^{1-p}\to 0$ per $R\to+\infty$, in tal caso abbiamo $\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{1-p}(\underbrace{R^{1-p}}_{\to 0}-1) = -\frac{1}{1-p} = \frac{1}{p-1}$)

Invece se abbiamo $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx \begin{cases} \text{conv. se } p<1 \\ \text{div. se } p\geq 1 \end{cases}$

Mettiamo in evidenza questo risultato:

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \begin{cases} \text{converge a } \frac{1}{p-1} & \text{se } p>1 \\ \text{diverge a } +\infty & \text{se } p\leq 1 \end{cases}}$$

come la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ conv. se $p>1$, div. se $p\leq 1$

2. Integrali impropri di 2° specie: se nell'intervallo di integrazione si ha almeno un punto di discontinuità.

Sia f una funzione continua su $(a,b]$ dove a è un punto di discontinuità. L'integrale improprio di seconda specie della tale funzione è:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

Se f è continua su $[a,b)$ dove b è un punto di discontinuità:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

Esempio 1) $\int_1^2 \frac{1+3x}{x^2-1}\,dx$ Poichè $f(x)=\frac{1+3x}{x^2-1}$ ha un punto di discontinuità in $x=1$, l'integrale è improprio di seconda specie.

$$\int_1^2 \frac{1+3x}{x^2-1}\,dx = \lim_{c\to 1^+} \underbrace{\int_c^2 \frac{1+3x}{x^2-1}\,dx}_{I}$$

$$I = \int_c^2 \frac{1+3x}{(x-1)(x+1)}\,dx$$

$$\frac{1+3x}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow Ax + A + Bx - B = 3x+1$$

$$\begin{array}{r} A + \cancel{B} = 3 \\ A - \cancel{B} = 1 \\ \hline 2A = 4 \\ \boxed{A=2} \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} A+B=3 \\ A=2 \end{array}\right\} \boxed{B=1}$$

$$I = 2\int_c^2 \frac{1}{x-1}\,dx + \int_c^2 \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= 2\ln|x-1|\Big|_c^2 + \ln|x+1|\Big|_c^2 = 2(\underbrace{\ln 1}_{0} - \ln|c-1|) + \ln 3 - \ln|c+1|$$

$$\lim_{c\to 1^+} -2\ln|c-1| - \underbrace{\ln|c+1|}_{\ln 2} + \ln 3 = \ln 3 - \ln 2 - 2\lim_{c\to 1^+} \ln|c-1|$$

per $c\to 1^+$, $c-1 = n \to 0^+$
per $n \to 0^+$, $\ln(n) \to -\infty$

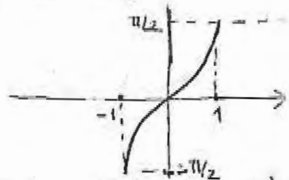
$$= \ln 3 - \ln 2 + \infty = +\infty$$

Poiché il limite ottenuto è infinito, l'integrale improprio diverge.

2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ Poichè $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ ha un punto di discontinuità in $x=2$, l'integrale è improprio di seconda specie.

$$\lim_{c\to 2^-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \lim_{c\to 2^-} \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^c = \lim_{c\to 2^-} \sin^{-1}\left(\frac{c}{2}\right) - \sin^{-1}(0)$$

$$= \sin^{-1}(1^-) - \sin^{-1}(0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$



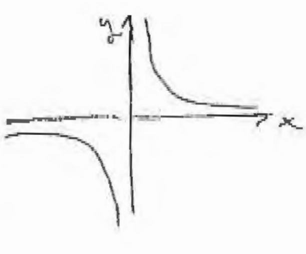
$\sin 0 = 0 \quad \sin^{-1}(0) = 0$
$\sin\frac{\pi}{2} = 1 \quad \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$
$\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1 \quad \sin^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$

3) $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ Poichè $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ha un punto di discontinuità in $x=0$, l'integrale è improprio di 2° specie:

$$\int_{-2}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-2}^0 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c_1\to 0^-} \int_{-2}^{c_1} \frac{1}{x^2}\,dx + \lim_{c_2\to 0^+} \int_{c_2}^1 \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{c_1\to 0^-} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-2}^{c_1} + \lim_{c_2\to 0^+} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{c_2}^1 = \lim_{c_1\to 0^-} -\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{2}\right) + \lim_{c_2\to 0^+} -\left(1 - \frac{1}{c_2}\right)$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2} - \underbrace{\lim_{c_1\to 0^-} \frac{1}{c_1}}_{-\infty}}_{+\infty} - 1 + \underbrace{\lim_{c_2\to 0^+} \frac{1}{c_2}}_{+\infty} = +\infty$$



Poiché il limite è infinito, l'integrale improprio diverge!

Criteri di Convergenza per Integrali Impropri

A volte non è possibile calcolare esplicitamente la funzione integrale di una funzione f data, però si riesce comunque a stabilire se l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge o diverge. Esistono infatti dei criteri di convergenza del tutto simili a quelli già studiati per le serie.

Criterio Del Confronto

Teorema: Siano f e g due funzioni continue (quindi integrabili) tali che

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \text{per ogni } x \in [a, +\infty)$$

Allora,

(1) Se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge allora anche $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

(2) Se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge allora anche $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge

* i criteri valgono anche per $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}$ oppure $f,g:(a,b]\to\mathbb{R}$ in altre parole valgono per gli integrali impropri di seconda specie in tal caso parleremo di $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$

Esempio: $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+1}$ sappiamo che $\frac{1}{e^x+1} < \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, poi:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{-x}dx = \lim_{R\to+\infty} -e^{-x}\Big|_0^R = \lim_{R\to+\infty} -\Big(\overset{\to 0}{\frac{1}{e^R}} - \frac{1}{e^0}\Big) = 1$$

Perciò l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ converge, quindi anche $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+1}$ converge.

Definizione (funzione assolutamente integrabile): Sia $f: I \to \mathbb{R}$. Si dice che f è assolutamente integrabile se e solo se esiste finito l'integrale:

$$\int_I |f(x)|\,dx$$

ossia se $|f|$ è integrabile in senso improprio in I, dove $I \subseteq \mathbb{R}$.

Teorema: Sia $f: I \to \mathbb{R}$ integrabile in ogni intervallo (sottoinsieme di I) chiuso e limitato. Se f è assolutamente integrabile in senso improprio in I, allora è integrabile in senso improprio in I e risulta

$$\left| \int_I f(x)\,dx \right| \leq \int_I |f(x)|\,dx$$

$I = [a, +\infty)$ oppure $(-\infty, b]$

Risulta anche che

$$\text{se } \int_I |f(x)|\,dx \text{ converge} \Rightarrow \int_I f(x)dx \text{ converge}$$

Esempio: Verificare che l'integrale improprio converge:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$$

Per il teorema precedente, abbiamo:

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx \right| \leq \int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| dx$$

Sappiamo inoltre che $\cos(x)$ è limitata su $[-1, 1]$, quindi possiamo scrivere

$|\cos(x)| \leq 1$

quindi vale la relazione

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx \right| \leq \int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

L'ultimo integrale è convergente $(p = 2 > 1)$, quindi per il criterio del confronto anche l'integrale di partenza è convergente.

Criterio del confronto asintotico per integrali impropri

Siano $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, continue, e $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$. $\forall x \in [a, +\infty)$

tali che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Allora valgono le seguenti affermazioni:

1) Se $L \in [0, +\infty)$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ è convergente, allora $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

2) Se $L \in (0, +\infty)$ allora $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge se e solo se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge.

3) Se $L \in (0, +\infty]$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge a $+\infty$, allora anche $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

Equivalentemente;

2) Se $L \neq 0$ (finito), $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\Longleftrightarrow$ $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge

(ossia sono entrambi convergenti oppure entrambi divergenti)

1) Se $L = 0$ e se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge $\Longrightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

3) Se $L = +\infty$ e se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge $\Longrightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge

Esempio 1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\,dx$ il scopo è determinare una funzione g tale che $f \sim g$ per $x \to +\infty$

Sappiamo che $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$ $\left(\frac{1}{x} \to 0 \text{ per } x \to +\infty\right)$

Quindi $\displaystyle\frac{\sin(1/x)}{x} \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$

Allora $g(x) = \frac{1}{x^2}$, ora possiamo applicare il criterio del confronto asintotico.

Poichè l'integrale della funzione g è convergente $\left(\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx}_{\text{converge}},\ p = 2 > 1\right)$

allora anche l'integrale di partenza, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\,dx$ converge.

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+\sqrt{x}}{x+x^2}\,dx$

determiniamo la funzione g tale che $f \sim g$ per $x \to 0^+$ (il punto di discontinuità)

$$\frac{x+\sqrt{x}}{x+x^2} \sim \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ per } x \to 0^+$$

Dato che $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx$ converge $(p = 1/2 < 1)$, allora anche $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+\sqrt{x}}{x+x^2}\,dx$ converge

per il criterio del confronto asintotico.

Relazione con la serie

Criterio del confronto tra serie e integrale improprio

Teorema: Sia $a \in \mathbb{N}$. Consideriamo una funzione $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua su $[a, +\infty)$

e che sia:

- positiva
- (monotona) decrescente
- infinitesima per $x \to +\infty$, ossia $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Allora,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge} \iff \sum_{n=a}^{+\infty} f(n) \text{ converge}$$ (ossia sono entrambi convergenti o divergenti)

Esempio: Studiamo la convergenza dell'integrale improprio:

$\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$, $f(x) = \frac{1}{e^{x^2}}$ è positiva, decrescente infatti $f'(x) = -2x\underbrace{e^{-x^2}}_{\text{sempre positivo}} < 0$ per $x \in [1, +\infty)$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$ quindi infinitesima.

La serie associata è:

$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2}$ che converge

(applichiamo il criterio della radice, abbiamo
$\frac{1}{\sqrt[n]{e^{n^2}}} = \frac{1}{e^n} \to 0 < 1$, quindi la serie di partenza converge
(per $n\to+\infty$))

si può applicare anche il criterio del rapporto

Possiamo concludere quindi che anche l'integrale improprio converge.

Integrali Impropri Principali (metto su Ariel)

(1) Se $a<b$, allora:

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx \begin{cases} \text{converge se } p<1 \\ \text{diverge (a } +\infty) \text{ se } p\geq 1 \end{cases}$$

* Quindi, per $\alpha>0$ e $a=0$, abbiamo

$$\int_0^\alpha \frac{1}{x^p}dx \begin{cases} \text{converge se } p<1 \\ \text{diverge (a } +\infty) \text{ se } p\geq 1 \end{cases}$$

* (2) Sia $a>0$, allora:

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx \begin{cases} \text{converge se } p>1 \\ \text{diverge (a } +\infty) \text{ se } p\leq 1 \end{cases}$$

(3) Sia $0<\alpha<1$, allora:

$$\int_0^\alpha \frac{1}{x^p|\ln(x)|^q}dx \begin{cases} \text{converge se } \begin{cases} p<1, & q\in\mathbb{R} \\ p=1, & q>1 \end{cases} \\ \text{diverge (a } +\infty) \text{ se } \begin{cases} p>1, & q\in\mathbb{R} \\ p=1, & q\leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

(4) Sia $a>1$, allora:

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p\ln^q(x)}dx \begin{cases} \text{converge se } \begin{cases} p>1, & q\in\mathbb{R} \\ p=1, & q>1 \end{cases} \\ \text{diverge (a } +\infty) \text{ se } \begin{cases} p<1, & q\in\mathbb{R} \\ p=1, & q\leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

(5) Sia $\alpha>1$, allora:

$$\int_1^\alpha \frac{1}{\ln^p(x)}dx \begin{cases} \text{converge se } p<1 \\ \text{diverge (a } +\infty) \text{ se } p\geq 1 \end{cases}$$

Successioni e Serie di Funzioni

Succesioni di funzioni

Una successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione i cui elementi sono funzioni definite tutte nello stesso intervallo.

$$\{f_n(x)\} = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots\}, \quad \text{dove } f_n : I \to \mathbb{R}, \quad I \subseteq \mathbb{R}.$$

Formalmente, si può pensare tale successione come una applicazione che ad ogni $n\in\mathbb{N}$ associa una funzione $f_n(x)$, ossia, $F:(\mathbb{N}\times I)\to\mathbb{R}$ t.c. $F(n,x)=f_n(x)$, $\forall (n,x)\in\mathbb{N}\times I$

La nozione di convergenza per una successioni di funzioni si può definire in due modi.

Definizione: Siano $\{f_n\}$ una succ. di funzioni e $f: I\to\mathbb{R}$. Si dice che $\{f_n\}$ **converge puntualmente alla funzione f** in I e si scrive $f_n \to f$ in I se,

$$\forall x\in I, \; \exists \text{ finito } \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \quad , \text{ ossia,}$$

se $\forall x\in I$ e $\forall \varepsilon>0$, $\exists\, N(x,\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tale che se $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq N$ si ha $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

Esempio 1) La successione $f_n(x)=\dfrac{nx^2}{1+nx^2}$, definita per $x\in\mathbb{R}$, converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad f(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ 1 & \text{se } x\neq 0\end{cases}$$

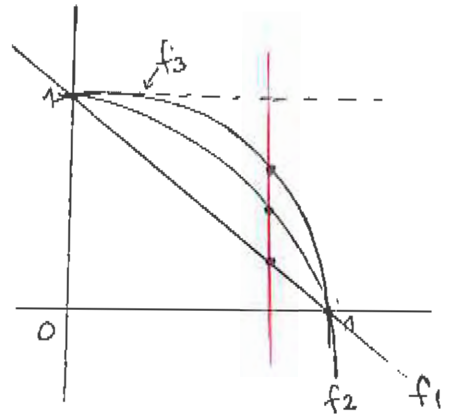
Per verificarlo, studiamo il limite per $n\to+\infty$ considerando $x\in\mathbb{R}$ come un parametro. Per $x=0$, abbiamo $f_n(0)=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, invece per $x\neq0$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{nx^2}{1+nx^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{nx^2}}{\cancel{nx^2}\left(1+\underbrace{\frac{1}{nx^2}}_{\to 0}\right)} = 1$$

2) Sia $f_n(x)=\sin(nx)$ $\forall x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$. Per ogni $x\in\mathbb{R}$, $x\neq k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, la successione $\{\sin(nx)\}$ è irregolare, quindi la succ. di funzioni $\{f_n\}$ non converge puntualmente.

3) $f_n(x) = 1-x^n$

dove $x\in[0,1]$



$f_n(x) = 1 - x^n \qquad [0,1]$

$f_1(x) = 1 - x$

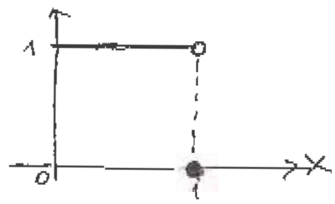
$f_2(x) = 1 - x^2$

$f_3(x) = 1 - x^3$

$\vdots$

$f_n(x)$

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \underbrace{1 - x^n}_{f_n(x) \to f(x)} = f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$



Concludiamo che $f_n(x)$ converge a $f(x)$ puntualmente.

Definizione: Siano $\{f_n\}$ una succ. di funzioni e $f: I \Rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che $\{f_n\}$ converge uniformemente a f in I, e si scrive $f_n \rightrightarrows f$ in I se,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0 \qquad \text{, assia,}$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ e $\forall x \in I$ si ha $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Il concetto di convergenza uniforme risulta essere più forte di quello di convergenza puntuale.

In particolare,

$$f_n \rightrightarrows f \text{ in } I \Rightarrow f_n \to f \text{ in } I$$

A parole, la convergenza uniforme implica la convergenza puntuale.

Esempio: $\{f_n(x)\} = \{1 - x^n\}$, $x \in [0,1]$

Sappiamo che $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} |x^n| & x \in [0,1) \\ 0 & x = 1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{l} x \in [0,1] \Rightarrow |1 - x^n - 1| = |x^n| \\ x = 1 \Rightarrow \underset{0}{f_n(1)} - \underset{0}{f(1)} = 0 \end{array} \right)$$

Quindi $\forall n$,

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} |x^n| = \lim_{x\to 1} x^n = 1 \neq 0$$

Concludiamo che $\{f_n\}$ <u>non</u> converge uniformemente in $[0,1]$ al suo limite puntuale f.

Teorema (Criterio di Cauchy per le successioni di funzioni): Sia $\{f_n\}$ una succ. di funzioni definite in I. $\{f_n\}$ converge uniformemente in I se e solo se $\forall \varepsilon>0$ esiste $N(\varepsilon)>0$ tale che $\forall n,m \geq N$ e $\forall x\in I$ si ha $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$.
(per ogni $n,m\in\mathbb{N}$)

Teorema (Conservazione della continuità): Sia $I\subseteq\mathbb{R}$ e sia $\{f_n\}$ una succ. di funzioni continue definite in I che converge uniformemente ad f in I. Allora anche la funzione f è continua in I.

Teorema (Conservazione della Derivata): Siano $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$, $\{f_n\}$ una succ. di funzioni definite in (a,b) e f, g due funzioni definite in (a,b). Supponiamo inoltre che $\{f_n\}$ derivabile e con derivata continua in (a,b), che $\{f_n\}$ converge uniformemente ad f in (a,b) e che $\{f_n'\}$ converge uniformemente a g in (a,b). Si ha allora che f è derivabile (con derivata continua) e che $f'=g$, ossia $\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = f'(x)$.

Teorema (Conservazione dell'integrale): Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una succ. di funzioni continue definite in $[a,b]$, dove $a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$, con $f_n\to f$ uniformemente. Allora

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Serie di Funzioni

Una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{k} f_n(x)$, $f_n: I\to\mathbb{R}$, $x\in I\subseteq\mathbb{R}$

è un caso particolare di successione di funzioni: la successione delle somme parziali:

$$S_k(x) = \sum_{n=0}^{k} f_n(x) = f_0(x)+f_1(x)+\dots+f_k(x)$$

è una successione di funzioni. Quindi i concetti di convergenza puntuale e uniforme si trasportano:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \text{converge puntualmente ad } S: I \to \mathbb{R} \iff S_k \to S \quad \text{in } I.$$

$$\text{converge uniformemente ad } S: I \to \mathbb{R} \iff S_k \rightrightarrows S \quad \text{in } I.$$

ossia, converge puntualmente ad S in $I \subseteq \mathbb{R}$ se $\forall x \in I$, $\boxed{\exists \text{ finito } \lim_{k \to +\infty} S_k(x) = S(x)}$

e converge uniformemente ad S in $I \subseteq \mathbb{R}$, se $\boxed{\lim_{k \to +\infty} \sup_{x \in I} |S_k(x) - S(x)| = 0}$

$$\| \\ |S(x) - S_k(x)|$$

La funzione $S: I \to \mathbb{R}$ definita da

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

è detta somma della serie di funzioni.

conv. uniform se $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq N$ e $n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in I \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

conv. punt. se $\forall x \in I$ e $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq N$ $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$

Definizione: La serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ è detta totalmente convergente in I, se la serie numerica a termini non negativi $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sup_{x \in I} |f_n(x)|}_{M_n}$ converge.

convergenza totale $\overset{\text{implica}}{\Longrightarrow}$ convergenza uniforme $\Rightarrow$ convergenza puntuale

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ è totalmente convergente in I, se esiste una successione numerica $\{b_n\}$ t.c. $|f_n(x)| \leq b_n$, $\forall x \in I$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è convergente.

Esempio 1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$

$\sin(nx) \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow M_n = \dfrac{1}{n^3}$ e sappiamo che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge (una serie armonica con $p = 3 > 1$)

allora la serie di partenza converge totalmente e quindi anche uniformemente in $\mathbb{R}$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$

$|f_n(x)| = \dfrac{1}{x^2 + n^2}$ e sappiamo che se esiste massimo di una funzione, $M = \sup$.

$f_n'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+n^2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$ ($(x^2+n^2)^2$ sempre positivo)

0
$+ \quad | \quad -$
max

$\nearrow \left| \dfrac{1}{x^2+n^2} \right| \leq \dfrac{1}{n^2}$

$x = 0$ è un punto di massimo assoluto $\forall n \in \mathbb{N}$, il massimo è $f_n(0) = \dfrac{1}{n^2}$ e

poiché $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, la serie di partenza converge totalmente in $\mathbb{R}$.

Teorema (Continuità della somma di una serie di funzioni): Siano $f_n: I \to \mathbb{R}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ una serie di funzioni reali e continue in I, che converge uniformemente ad S in I. Allora la somma S è continua in I.

Teorema (Integrazione per serie di funzioni):

Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente ad S in un intervallo I e tutte le f_n sono continue in I, allora per ogni intervallo $[a,b] \subseteq I$ risulta che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \int_a^b S(x)\,dx$$

Teorema (Derivabilità per serie di funzioni): Sia $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ una serie di funzioni derivabili, definite in un intervallo I tale che;

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente ad S in I.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$ converge uniformemente a G in I.

Allora, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente ad S derivabile in I e vale:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) = S'(x) = G(x)$$

Esercizi 1) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)}$ $\qquad x \neq 0, -1, -2, \ldots$

$$\frac{1}{(x+n)(x+n-1)} = \frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n}$$

$$S_n = \frac{1}{x} - \cancel{\frac{1}{x+1}} + \cancel{\frac{1}{x+1}} - \cancel{\frac{1}{x+2}} + \cancel{\frac{1}{x+2}} - \cancel{\frac{1}{x+3}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{x+n-1}} - \frac{1}{x+n}$$

$$S_n = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n}$$

Converge puntualmente?

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} - \overbrace{\frac{1}{x+n}}^{\to 0} = \frac{1}{x} = S(x) \quad \exists \text{ finito per } x \in \mathbb{R}-\{0\}$$

converge uniformemente?

$$\left| S_n(x) - S(x) \right| = \left| \cancel{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x+n} - \cancel{\frac{1}{x}} \right| = \left| \frac{1}{x+n} \right| \leq \,?$$

$$\left| \frac{1}{x+n} \right| \leq \frac{1}{n}$$ (non dipende a x, e tende a zero per $n\to\infty$)

Quindi la serie di partenza conv. uniformemente.

2) Studiare la convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} \sin^n x \cdot \cos^n x$, conv. uniformemente?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin^n x \cdot \cos^n x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)^n$$

$$|\sin 2x| \leq 1$$

$$\left|\frac{1}{2}\sin 2x\right| \leq \frac{1}{2}$$

$\left|\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^n\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$; sappiamo che $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ è una serie geometrica con $|r|<1$ che converge

Quindi per il teorema, la serie di partenza converge uniformemente e anche puntualmente.

Serie di Potenze

Siano a_n una successione di numeri reali e $x_0 \in \mathbb{R}$. Si dice serie di potenze di centro x_0 la serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots \quad , a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+$$

Osservazioni

1) Una serie di potenze è una particolare serie di funzioni con $f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$
2) Una serie di potenze converge sempre nel punto x_0
3) La nozione di serie di potenze è una estensione del concetto di polinomio.

Definizione: (criterio di D'Alembert) cr. del rapporto — Se esiste il limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \quad , a_n \neq 0$$

Il criterio della radice $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$

allora si dice raggio di convergenza della serie di potenze il valore reale il reciproco del numero L, cioè il numero:

$$R = \begin{cases} 1/L & \text{se } L \in (0,+\infty) \\ +\infty & \text{se } L = 0 \\ 0 & \text{se } L = +\infty \end{cases}$$

Definizione: Si dice l'insieme di convergenza della serie di potenze l'insieme $I = \{x \in \mathbb{R} : \text{la serie di potenze converge}\}$

Se $R=0 \Rightarrow I$ è il punto $x=x_0$
Se $R=\infty \Rightarrow I = \mathbb{R} = (-\infty,\infty)$
Se $R \in (0,+\infty) \Rightarrow I$ è un intervallo finito centrato a x_0 → $[x_0-R, x_0+R]$ o $[x_0-R, x_0+R)$ o $(x_0-R, x_0+R]$ o (x_0-R, x_0+R)

NO!. Teorema di Abel

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R \geq 0$.

Quindi valgono i seguenti risultati:

(1) se la serie converge puntualmente in x_0+R allora essa convergerà uniformemente in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in $(x_0-R, x_0+R]$;

(2) se la serie conv. punt. in x_0-R allora essa convergerà uniform. in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in $[x_0-R, x_0+R)$;

(3) se la serie conv. punt. in x_0-R e in x_0+R allora essa convergerà uniform. in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in $[x_0-R, x_0+R]$.

Questo teorema dice che l'insieme di convergenza I di una serie di potenze non è mai vuoto, vuol dire che questo insieme è un intervallo.

---

(1) Se $R=0$, la serie di potenze conv. punt. solo in x_0 (centro della serie)

(2) Se $R=\infty$, " converge:

- punt. in ogni $x \in \mathbb{R}$
- uniform. in ogni intervallo $\underbrace{\text{chiuso e limitato}}_{\text{compatto}}$ $[x_0-k, x_0+k]$, $k>0$.

(3) Se $R \in (0,\infty)$, la serie di potenze

- conv. punt. $\forall x$ t.c. $|x-x_0|<R$
- non converge in alcun punto x t.c. $|x-x_0|>R$
- conv. uniform. in ogni intervallo $\underbrace{\text{chiuso e limitato}}_{\text{compatto}}$ $[x_0-k, x_0+k]$, $0<k<R$.

Esempi 1) Determinare il raggio di convergenza e gli insiemi di conv. punt. ed uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n!\, x^n$$

Abbiamo $a_n = n!$ e $x_0=0$ (centro)

$$L = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}}\right| = \lim_{n\to+\infty}|n+1| = +\infty$$

allora $R=\frac{1}{L}=0$

e per il teorema di convergenza sulle serie di potenze concludiamo che la serie conv. puntualmente solo in $x_0=0$.

2) Determinare il raggio e l'intervallo (l'insieme) di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n$$

Passiamo scrivere la serie come: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot x^n$, in questo caso $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ e $x_0=0$.

Applicando il criterio del rapporto, otteniamo:

$$L = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{1/3^{n+1}}{1/3^n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{1}{3 \cdot \cancel{3^n}} \cdot \cancel{3^n} \right| = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow R = 3$, $I = (x_0 - R, x_0 + R) = (-3, 3)$

$0 = x_0$

-3 3

Quindi, la serie converge assolutamente per $|x| < 3$ e diverge per $|x| > 3$.

Un'altro metodo per trovare convergenza:

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{x^{n+1}/3^{n+1}}{x^n/3^n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\cancel{x^n} x}{\cancel{3^n} \cdot 3} \cdot \frac{\cancel{3^n}}{\cancel{x^n}} \right| = \left| \frac{x}{3} \right| \underbrace{<}_{\text{per la convergenza}} 1$$

$\Rightarrow$ la serie conv. assolutamente per $|x| < 3$ e diverge per $|x| > 3$

(si può usare anche $\sqrt[n]{|a_n|}$)

Negli estremi, $x = \pm 3$, è necessario verificare il carattere della serie.

Se $x = 3$, abbiamo: $\sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$, ossia la serie diverge in $x = 3$

Se $x = -3$, abbiamo: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ non converge

Quindi l'intervallo di convergenza della serie di potenze è $(-3, 3)$.
(conv. uniform. in ogni intervallo compatto $[-k, k]$, $0 < k < 3$)

3) Determinare l'intervallo di convergenza di

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Abbiamo: $a_n = 1/n!$ e $x_0 = 0$

$$L = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{1/(n+1)!}{1/n!} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{(n+1)\cancel{n!}} \cdot \cancel{n!} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = 0$$

$\Rightarrow R = +\infty$, $I = (-\infty, +\infty)$

Quindi la serie conv. ass. per ogni $x \in \mathbb{R}$ e totalmente quindi anche uniform.
(o conv. puntualmente)
in ogni intervallo compatto $[-k, k]$, $k > 0$.

Un'altra caratteristica notevole delle serie di potenze è la seguente: la serie delle derivate e quella delle primitive di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ sono ancora serie di potenze, precisamente:

se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$
defn. su $(x_0 - R, x_0 + R)$

$$\begin{cases} f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \\ \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} \end{cases}$$

Serie di Maclaurin

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k}}_{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots, \quad |x|<1$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots, \quad |x| < \dots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n \cdot x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n , \quad |x|<1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \text{ (serie geometrica) } = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad , |x|<1$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{n! \, 2^n} \cdot x^n + \dots$$

FORMULA DI TAYLOR

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

($n = +\infty \rightarrow$ serie di TAYLOR)

FORMULA DI MACLAURIN

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$$

($n = +\infty \rightarrow$ serie di Maclaurin)

SERIE DI POTENZE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots \quad , \quad a_k \in \mathbb{R}, \ k \in \mathbb{Z}^+$$

Esempio: Consideriamo la serie di Taylor con $x_0=0$ (serie di Maclaurin)

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , \quad |x|<1$$

(la serie geometrica)

(È un esempio anche per rappresentare una funzione (in un certo intervallo) attraverso una serie di potenze)

Abbiamo:

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{1}{1-x}\,dx &= \int\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int x^n dx \\ -\ln(1-x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} \\ \ln(1-x) &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots-\frac{x^{n+1}}{n+1}-\ldots \\ \Bigg(\text{Infatti sappiamo che } \ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}+\ldots\Bigg) \end{aligned}\right\} |x|<1$$

Somma di una serie di potenze

Purtroppo non esiste un metodo standard per calcolare la somma di una serie di potenze. Bisogna infatti trovare una serie numerica notevole degli sviluppi in serie di Taylor (o Maclaurin) e utilizzarla per il calcolo della somma.

Esempio: Determinare il raggio e l'intervallo di convergenza (puntuale ed uniforme) e la somma della serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(n-1)!}$$

Poniamo $k=n-1$ $(n=k+1)$, allora abbiamo: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{k!}=x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x^2)^k}{k!}$ che

é una serie di potenze di x^2, con il centro $x_0=0$ e $a_k=\frac{1}{k!}$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/(k+1)!}{1/k!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(k+1)\cancel{k!}}\cdot\cancel{k!}\right|=0 \Rightarrow R=+\infty$$

La serie conv. puntualmente in $\mathbb{R}$ e uniformemente in ogni intervallo compatto $[-k,k]$, $\forall k>0$.

Determinare la somma: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(n-1)!}=x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x^2)^k}{k!}$

Sappiamo che lo sviluppo in serie di Maclaurin di $e^x=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{(n-1)!}=x\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(x^2)^k}{k!}=xe^{x^2}$$

poniamo x^2 nel posto di x nel sviluppo dell'esponenziale

Serie Formali di Potenze

Una serie formale di potenze nell'indeterminata X a coefficienti reali è un'espressione del tipo:

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

dove i coefficienti $a_n \in \mathbb{R}$. Una serie formale può anche identificarsi con la successione dei suoi coefficienti

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

dove a_0 si dice il termine costante della serie $A(x)$.

Se $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ sono due serie formali,

sono uguali se e solo se $a_n = b_n$, $\forall n$.

La loro somma: $\sum a_n x^n \pm \sum b_n x^n = \sum (a_n \pm b_n) x^n$, $\forall n$

Il prodotto: $\sum a_n \cdot x^n \cdot \sum b_n x^n = \sum c_n \cdot x^n$ dove $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ si dice il prodotto di Cauchy delle serie $A(x)$ e $B(x)$.

Se i raggi di convergenza di $A(x)$ e $B(x)$ sono R_a e R_b, rispettivamente.
allora il raggio di " di $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ è $R \geq \min\{R_a, R_b\}$.

Se c è un costante, abbiamo $\sum (c \cdot a_n) x^n = c \sum a_n x^n$, $\forall n$.

Una serie formale $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ è invertibile $\Leftrightarrow$ x_0 è invertibile

Sia $f(x) = \sum a_n x^n$, allora $f'(x) = \sum n a_n x^{n-1}$ è detta serie formale derivata di $f(x)$.

Se $f' = 0 \Rightarrow f = a_0$ invece
se $f' = f \Rightarrow f = c \cdot e^x$

Applicazione sulle successioni definite per ricorrenza

1) $a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad (n \geq 0,\ a_0 = 0)$

per $n=0$, $a_1 = 2a_0 + 1 = 1$
per $n=1$, $a_2 = 2a_1 + 1 = 3$
per $n=2$, $a_3 = 2a_2 + 1 = 7$

$\{0, 1, 3, 7, \dots\}$
$a_n = 2^n - 1$

$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$; consideriamo $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \cdot x^n = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots$

$$= \frac{[(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) - \overset{0}{a_0}]}{x}$$

$$= \frac{A(x)}{x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2a_n+1)x^n = 2\underbrace{\sum a_n x^n}_{A(x)} + \sum x^n = 2A(x) + \frac{1}{1-x}$$

Dato che $a_{n+1} = 2a_n + 1$, abbiamo

$$\frac{A(x)}{x} = 2A(x) + \frac{1}{1-x} \Rightarrow A(x) = 2xA(x) + \frac{x}{1-x}$$

$$(1-2x)A(x) = \frac{x}{1-x} \Rightarrow A(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = x\left(\frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x}\right)$$

$$= x\left(\underbrace{2\cdot\frac{1}{1-(2x)}}_{2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n} - \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\sum_{n=0}^{\infty}x^n}\right) = x\left[\left(2+2^2x+2^3x^2+\dots\right) - \left(1+x+x^2+\dots\right)\right]$$

$$= \left(2x+2^2x^2+2^3x^3+\dots\right) - \left(x+x^2+x^3+\dots\right)$$

$$= \underbrace{(2-1)}_{1}x + \underbrace{(2^2-1)}_{3}x^2 + \underbrace{(2^3-1)}_{7}x^3 + \dots \Rightarrow a_n = 2^n - 1, \; n \geq 0$$

2) Data la successione

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1}, & n \geq 1 \\ a_0 = 2 \end{cases}$$

esprimere a_n in funzione di n.

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow a_0 = A(x) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

$$3xA(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^{n+1} \underset{n \to n-1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} 3a_{n-1}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

$$a_0 = A(x) - 3xA(x) = 2$$

$$(1-3x)A(x) = 2$$

$$A(x) = 2\cdot\frac{1}{1-3x} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(2\cdot 3^n)x^n \Rightarrow a_n = 2\cdot 3^n$$

3) $$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + n, & n \geq 1 \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots = \frac{(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) - a_0}{x} = \frac{A(x)-1}{x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x\,(x^n)' = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d(x^n)}{dx} = x\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$= x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2} \Rightarrow \frac{A(x)-1}{x} = 2A(x) + \frac{x}{(1-x)^2} \Rightarrow A(x) - 1 = 2xA(x) + \frac{x^2}{(1-x)^2}$$

$$(1-2x)A(x) = \underbrace{1 + \frac{x^2}{(1-x)^2}}_{N:\; 1-2x+x^2+x^2} \Rightarrow A(x) = \frac{2x^2-2x+1}{(1-x)^2(1-2x)} = \frac{P}{1-x} + \frac{Q}{(1-x)^2} + \frac{R}{1-2x}$$

$$\qquad (1-x)(1-2x) \qquad (1-2x) \qquad (1-x)^2$$

$$\underbrace{P(1-x)(1-2x)}_{1-3x+2x^2} + Q(1-2x) + \underbrace{R(1-x)^2}_{1-2x+x^2} = 2x^2-2x+1$$

$$2Px^2 - 3Px + P + Q - 2Qx + Rx^2 - 2Rx + R = 2x^2 - 2x + 1$$

$$2P+R=2$$

$$\begin{array}{l} +(3P+2Q+2R)=+2 \\ -2/\ P+Q+R=1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3P+\cancel{2Q}+\cancel{2R}=2 \\ -2P-\cancel{2Q}-\cancel{2R}=-2 \end{array} \right\} P=0 \Rightarrow R=2 \Rightarrow Q=-1$$

$$A(x) = -\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-2x} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) + 2\frac{1}{1-(2x)} = -\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}(x^n) + \sum_{n=0}^{\infty}(2.2^n)x^n = -\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}.x^n = -\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n + \dots$$

(poniamo $n+1 \to n$)

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-n-1+2^{n+1})x^n \Longrightarrow a_n = 2^{n+1}-n-1$$

MODULO 14 – EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Le equazioni differenziali sono equazioni in cui l'incognita è una funzione $y(x)$ e in cui compaiono le derivate della funzione incognita. Nei casi in cui l'incognita è funzione di una sola variabile independente, si parla di equazioni differenziali ordinarie (EDO). L'ordine massimo di derivazione dell'incognita $y(x)$ individua l'ordine dell'equazione differenziale. Ad esempio, le equazioni $y'(x)=2x$ e $y'(x)+y(x)=x$ sono del primo ordine, e $y''(x)+3y'(x)=0$ è di secondo ordine.

La forma più generale di un'equazione differenziale ordinaria è:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad \text{dove } y: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ derivabile } n \text{ volte su } I,\ n\in\mathbb{N}.$$

1) Equazioni Differenziali Lineari Del Primo Ordine

Un'equazione diff. lineare del 1° ordine ha la seguente forma:

$$y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x) \qquad (*) \qquad (F(x,y,y')=0)$$

con $a(x)$ e $b(x)$ due funzioni continue in un certo intervallo $I\subseteq\mathbb{R}$. In generale, questa equazione ha infinite soluzioni, per esempio, tutte le funzioni costanti sono soluzioni dell'equazione $y'=0$ in $\mathbb{R}$. Quindi abbiamo bisogno delle condizioni ulteriori. Dati $x_0\in I$ e $y_0\in\mathbb{R}$, una soluzione y di $(*)$ che verifica $y(x_0)=y_0$ si dice soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = ay+b & \text{in } I \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

(condizione iniziale)

x_0: punto iniziale
y_0: valore "

L'equazione $(*)$ è omogenea se $b(x)=0$, $\forall x\in I$ e non omogenea (si dice completa) altrimenti.
L'equazione $y'=ay$ in I, si dice equazione omogenea associata alla $(*)$.

Consideriamo l'equazione omogenea associata alla (*). Supponiamo che y sia soluzione di $y'=ay$ in I e che $y(x)\neq 0, \forall x\in I$. Allora

$\frac{y'}{y}=a$, ossia dato che $y=f(x)$, $y'=f'(x)$ abbiamo $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=a$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y}dy=\int a\,dx$$

$$\ln|y|=\int a(x)\,dx+C_0$$

$$|y|=e^{\int a(x)dx+C_0}=e^{C_0}\cdot e^{\int a(x)dx}$$, ponendo $C=\pm e^{C_0}\neq 0$

si ottiene $\boxed{y(x)=C\cdot e^{\int a(x)dx}}$, $\forall C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ [la soluzione (o l'integrale) generale di $y'=ay$]

La costante C si può considerare come una costante di integrazione, eventualmente determinata dalla condizione $y(x_0)=y_0$ nel problema di Cauchy.

Esempio: $\begin{cases} y'=y^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$ $\qquad y'=y^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2}=dx$

$$\int \frac{1}{y^2}dy=\int dx$$

$$-\frac{1}{y}=x+C \quad , C\in\mathbb{R}$$

$$y=-\frac{1}{x+C}$$

Ora utilizziamo il valore iniziale: $y(\overset{x_0}{0})=\overset{y_0}{1}$

$1=-\frac{1}{C} \Rightarrow C=-1$, quindi la soluzione del problema di Cauchy:

$y(x)=-\frac{1}{x-1}$, ossia $y(x)=\frac{1}{1-x}$

Definizione: Un'equazione diff. di ordine n si dice in forma normale se la derivata di ordine massimo è determinata esplicitamente in funzione delle altre, ovvero se

$$y^{(n)}=F(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$$

Esempio: Partendo dal problema

$$\begin{cases} y^2+y'-1=0 \\ y(0)=0 \end{cases}$$

si può ottenere il seguente problema in cui equazione è scritta in forma normale:

$$\begin{cases} y'=1-y^2 \\ y(0)=0 \end{cases}$$

Pagina 122a

Se l'equazione diff. lineare del I° ordine non è omogenea:

$$y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x)$$
$$b(x) \neq 0$$

In questo caso, usiamo la formula per la soluzione generale:

$$y(x) = \underbrace{c \cdot e^{\int a(x)dx}}_{\text{sol. omogenea}} + \underbrace{e^{\int a(x)dx} \cdot \int b(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} dx}_{\text{sol. particolare}}$$

$$e^{\int a(x)dx} \cdot \left[\int b(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} dx + c\right]$$

Esempio 1) $y' = -xy + x$

$a(x) = -x$

$b(x) = x$

$$y = e^{-\int x dx}\left[\int x \cdot e^{\int x dx} dx + c\right]$$

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[\int x \cdot e^{\frac{x^2}{2}} dx + c\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} u = \frac{x^2}{2} \\ du = x\,dx \end{array}\right\} \int e^u du = e^u + c$$

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[e^{\frac{x^2}{2}} + c\right]$$

$$y(x) = 1 + c \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

2) Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'\cos x = 1 - y\sin x \\ y(\pi) = 2 \end{cases}$$

$$y'(x) = \frac{1}{\cos(x)} - y\tan(x) \Rightarrow a(x) = -\tan(x),\ b(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$y = e^{-\int \tan(x)dx}\left[\int \frac{1}{\cos(x)} \cdot e^{\int \tan(x) dx} dx + c\right]$$

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \quad \left\{\begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\sin x\, dx \end{array}\right\} = \int \frac{-du}{u} = -\ln|\cos x| + c \quad ; \text{ se } \cos x > 0$$

$$y = e^{\ln(\cos x)}\left[\underbrace{\int \frac{1}{\cos(x)} \cdot e^{-\ln(\cos x)} dx}_{\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan(x) + c} + c\right] \qquad e^{\ln(\cos x)^{-1}} = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$y = \cos x\,(\tan(x) + c)$$

$$2 = \underbrace{\cos(\pi)}_{-1}(\underbrace{\tan(\pi)}_{0} + c) \Rightarrow c = -2 \quad \text{, quindi}$$

se $\cos x < 0$

$y = -\cos x\,(-\tan x + c)$

$2 = \underbrace{-\cos\pi}_{1}(\underbrace{-\tan\pi}_{0} + c) \Rightarrow c = 2$

$y(x) = \sin x - 2\cos x$

$$y(x) = \cos(x)(\tan(x) - 2) \text{, oppure, } y(x) = \sin(x) - 2\cos(x)$$

$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

→ Pagina 121 b

Equazioni differenziali a variabili separabili

Le equazioni diff. a variabili separabili sono eq. diff. del primo ordine, del tipo:

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y(x)) \quad \text{con } g: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ e } h: J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ due}$$

funzioni continue ed $h(y) \neq 0$

Si procede: dividendo entrambi i membri per $h(y(x))$, si ottiene:

$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x)$$

Ora integriamo entrambi membri rispetto alla x:

$$\int \frac{y'(x)}{h(y(x))}\,dx = \int g(x)\,dx \quad \text{, ossia, } \int \frac{y'}{h(y)}\,dx = \int g(x)\,dx \qquad y' \to \frac{dy}{dx}$$

Quindi abbiamo,

$$\underbrace{\int \frac{1}{h(y)}\,dy}_{F(y(x))} = \underbrace{\int g(x)\,dx}_{G(x)+C} \qquad \left(\begin{array}{l} F: y(x) \longmapsto G(x)+C \\ F^{-1}: G(x)+C \longmapsto y(x) \end{array} \right)$$

Se F è invertibile in un intervallo $J' \subseteq J$ e $G(x)+C \in F(J')$, $\forall x \in I' \subseteq I$,

si ottiene quindi,

$$y(x) = F^{-1}(G(x)+C)$$

Esempio 1) $y' = 2xy$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx \Rightarrow \ln|y| = x^2 + C_0$$

$$|y| = e^{x^2+C_0} = e^{C_0} \cdot e^{x^2}$$

$$y = C \cdot e^{x^2} \quad \text{dove } C = \pm e^{C_0} \quad , \; e^{C_0} > 0$$

2) $2x\cos^2 y - y' = 0$

$$y' = 2x\cos^2 y$$

$$\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int 2x\,dx \Rightarrow \tan y = x^2 + c \Rightarrow y = \arctan(x^2+c) + k\pi$$

3) Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} xy' = e^y \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$$\int \frac{dy}{e^y} = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$-e^{-y} = \ln|x| + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$$

$$e^{-y} = -\ln|x| - c$$

$$y = -\ln(-\ln|x| - c)$$

$$0 = -\ln(-\underbrace{\ln 1}_{0} - c) \Rightarrow -c = 1 \Rightarrow \boxed{c = -1}$$

$$y = -\ln(\underbrace{-\ln|x| + 1}_{>0}) \quad \text{dove } |x| < e.$$

$$1 - \ln|x| > 0 \Rightarrow \ln|x| < 1 \Rightarrow |x| < e$$

2) Equazioni Differenziali Lineari Del Secondo Ordine

Un'equazione diff. lineare del II° ordine ha la seguente forma:

$$y''(x) + b(x)\, y'(x) + c(x)\, y(x) = g(x)$$ in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, con

$b(x)$, $c(x)$ e $g(x)$ continue in I. Se inoltre, dati $x_0 \in I$ e $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, risulta $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y_1$, allora y si dice soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' = -by' - cy + g & \text{in } I \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

Eq. diff. lineari del II° ordine a coefficienti costanti

Def.: Un'equazione diff. lineare del II° ordine a coefficienti costanti è del tipo:

$$a y''(x) + b y'(x) + c y(x) = f(x)$$

dove a e b sono coefficienti reali e f una funzione continua. Se $f = 0$ l'equazione si dice omogenea.

Equazioni omogenee a coefficienti costanti

Consideriamo l'equazione lineare a coefficienti costanti

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0) \qquad (*)$$

Per determinare la soluzione generale, è sufficiente trovare due soluzioni linearmente indipendenti. L'idea generale è quella di cercare soluzioni del tipo $y(x) = e^{\lambda x}$; sostituendo nell'equazione $(*)$ si ottiene l'equazione caratteristica associata alla $(*)$:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Si distinguono tre casi: consideriamo $\Delta = b^2 - 4ac$.

(i) Se $\Delta > 0$, ci sono due soluzioni reali distinte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Perciò, $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ sono soluzioni della $(*)$. Inoltre, sono linearmente indipendenti: $\boxed{y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x}}$

(ii) Se $\Delta = 0$, esiste una soluzione reale $\lambda = -\frac{b}{2a} \in \mathbb{R}$. Perciò, $y_1(x) = e^{\lambda x}$ è soluzione della $(*)$. Per individuare una seconda soluzione linearmente indipendente, si sceglie ad esempio $K(x) = x$ (che è lineare), quindi $y_2(x) = xe^{\lambda x}$. Inoltre, y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti:

$$\boxed{y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}} = e^{\lambda x}(c_1 + c_2 x)$$

(iii) se $\Delta < 0$, esistono due soluzioni complesse coniugate,

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = -\frac{b}{2a} \\ \beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)) \\ y_2(x) = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)) \end{array}\right\} \text{non sono funzioni a valori reali}$$

y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti:

$$y(x) = k_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + k_1 e^{\alpha x} \cdot i\sin(\beta x) + k_2 e^{\alpha x}\cos(\beta x) - k_2 e^{\alpha x} i\sin\beta(x)$$

$$y(x) = e^{\alpha x}\left[\cos(\beta x)\underbrace{(k_1+k_2)}_{c_1} + i\sin(\beta x)(k_1 - k_2)\right], \quad i(k_1-k_2) = c_2$$

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x))$$

Esempio: Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \quad e \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4.1.2 = -4 < 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1 \\ \beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1 \end{array}$$

L'equazione ha due radici complesse:

$\lambda_1 = -1+i$, $\lambda_2 = -1-i$

Dunque la soluzione generale dell'equazione è data da

$$y(x) = e^{-x}(c_1\cos(x) + c_2\sin(x))$$

La derivata:

$$y'(x) = -e^{-x}(c_1\cos(x) + c_2\sin(x)) + e^{-x}(-c_1\sin(x) + c_2\cos(x))$$

Considerando le condizioni iniziali si ottiene il sistema

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ -c_1 + c_2 = 1 \end{cases}$$

risulta che $c_1 = 1$ e $c_2 = 2$.

La funzione cercata è quindi

$$y(x) = e^{-x}(\cos(x) + 2\sin(x))$$

Soluzioni di equazioni diff. lineari non omogenee a coefficienti costanti

Consideriamo le equazioni diff. del tipo:

$$ay'' + by' + cy = g(x) \quad \text{in } \mathbb{R}$$

dove $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $g(x)$ è una funzione continua in $\mathbb{R}$.

Esempio: $y'' + 2y' = x \quad (*)$

La soluzione generale:

$$y_g(x) = \underbrace{y_o(x)}_{\text{soluzione omogenea}} + \underbrace{y_p(x)}_{\text{soluzione particolare}}$$

dove y_o: soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla $(*)$

y_p: soluzione particolare

L'equazione omogenea associata alla $(*)$:

$$y'' + 2y' = 0$$

L'equazione caratteristica associata all'equazione precedente:

$$\lambda^2 + 2\lambda = 0 \quad ; \quad \lambda(\lambda+2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \; \lambda_2 = -2$$

La soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla $(*)$:

$$y_o(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = c_1 + c_2 e^{-2x}$$

Quindi abbiamo $y_g(x) = c_1 + c_2 e^{-2x} + y_p(x)$, ora troviamo $y_p(x)$:

Se $g(x) = P(x)$ è un polinomio di grado n, si considera un polinomio $Q(x)$ di grado $n+1$ per trovare la soluzione particolare. In questo caso, abbiamo $P(x) = x$, quindi $Q(x)$ ha la seguente forma:

$$\left.\begin{aligned} Q(x) = y_p(x) &= ax^2 + bx + c \\ y'_p(x) &= 2ax + b \\ y''_p(x) &= 2a \end{aligned}\right\}$$

(si inseriscono nell'equazione $(*)$)

$$y'' + 2y' = x$$

$$2a + 4ax + 2b = x$$

$$\begin{cases} 2a + 2b = 0 \Rightarrow b = -a \\ 4a = 1 \Rightarrow \boxed{a = 1/4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{b = -1/4}$$

Risulta che, $y_p(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + c$

Dunque la soluzione generale della $(*)$ è:

$$y(x) = k + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x \quad , \text{ dove } \underset{\text{costante}}{k = c_1 + c}$$

Esercizi 1) $y'' + y' - 2y = e^{-2x}$

L'equazione omogenea: $y'' + y' - 2y = 0$

" caratteristica: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot 1(-2)}}{2}$

$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$

$\lambda_1 = -2 \ , \ \lambda_2 = 1$

La soluzione generale dell'eq. omogenea:

$$y_0(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$$

Dato che $g(x) = e^{-2x}$, si considera come la soluzione particolare una funzione nella forma $e^{\lambda x}$, e esistono due casi:

(i) se $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2$, consideriamo $y_p(x) = A e^{\lambda x}$

(ii) se $\left.\begin{array}{l}\lambda = \lambda_1 \\ \text{oppure} \\ \lambda = \lambda_2\end{array}\right\}$ consideriamo $y_p(x) = A\underline{x} e^{\lambda x}$

In questo caso, abbiamo $\lambda = -2 = \lambda_1$, quindi

$$y_p = Axe^{-2x}$$

$$y_p' = A(e^{-2x} - 2xe^{-2x}) = Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x} = e^{-2x}(A - 2Ax)$$

$$y_p'' = -2Ae^{-2x} - 2A(e^{-2x} - 2xe^{-2x}) = e^{-2x}(-4A + 4Ax)$$

Inseriamo nell'equazione di partenza:

$$e^{-2x}(-4A+4Ax) + e^{-2x}(A-2Ax) - 2Axe^{-2x} = e^{-2x} \quad \left(\text{dividiamo entrambe le parti per } e^{-2x}\right)$$

$$-4A + \cancel{4Ax} + A - \cancel{2Ax} - \cancel{2Ax} = 1$$

$$-3A = 1 \Rightarrow A = -1/3 \Rightarrow \boxed{y_p = -\frac{1}{3}xe^{-2x}}$$

Dunque la soluzione generale:

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} - \frac{1}{3}xe^{-2x}}$$

2) $y'' - y' = \cos x$

L'equazione omogenea: $y'' - y' = 0$

" caratteristica: $\lambda^2 - \lambda = 0 \rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \begin{array}{l}\nearrow \lambda_1 = 0 \\ \searrow \lambda_2 = 1\end{array}$

Quindi $y_0(x) = c_1 e^{0.x} + c_2 e^{1.x} = c_1 + c_2 e^{x}$

Dato che $g(x) = \cos x$, si considera come la soluzione particolare la seguente funzione:

$$y_p = a\cos x + b\sin x$$

$$y_p' = -a\sin x + b\cos x$$

$$y_p'' = -a\cos x - b\sin x$$

Inseriamo nell'equazione: $y'' - y' = \cos x$

$$-a\cos x - b\sin x + a\sin x - b\cos x = \cos x$$

$$\cos x(-a-b) + \sin x(a-b) = \cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a-b=1 \\ a-b=0 \Rightarrow a=b \end{cases}$$

$$-2b = 1 \Rightarrow b = -1/2 \Rightarrow a = -1/2$$

$$y_p = a\cos x + b\sin x$$

$$\boxed{y_p(x) = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x}$$

Quindi la soluzione generale:

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x)$$

$$\boxed{y(x) = c_1 + c_2 e^x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x}$$

Se $g(x) = P(x)$ è un polinomio di grado 3:

Ad esempio, $ay'' + by' + cy = x^3$

In questo caso, si considera un polinomio $Q(x)$ di grado 4 $n+1$ come la soluzione particolare:

$$Q(x) = y_p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$y'_p(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$y''_p(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

e poi si inseriscono nell'equazione.