Mde/Fond 3° compitino 16/3/2013

1) Discutere, al variare di α reale, la continuità di

$$y = \begin{cases} \operatorname{artg} \dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{per } x \neq 1 \\ \alpha & \text{per } x = 1 \end{cases}$$

2) CE e asintoti di $y = (x-2)\, e^{\frac{x}{x-1}}$

3) Data $y = \log^3(3x^2+1)$ scrivere l'equazione della tangente nel suo punto di ascissa $x = -1$

4) Data $y = \sqrt[3]{27x^3 - 9x^2 - 3x}$ derivare e studiare la natura di $(0,0)$

5) Scrivere i primi 4 termini $(\neq 0)$ dello sviluppo di McLaurin di

$y = \cos(3x) - e^{2x}$

III compitino 16/3/2013 3C1

1) Discutere al variare di α reale la continuità di

$$y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{(x-1)^2} & x \neq 1 \\ \alpha & x = 1 \end{cases}$$

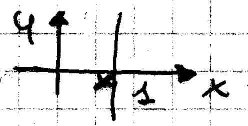
$$\lim_{x \to 1} y = \frac{\pi}{2} \qquad \left(\operatorname{arctg}(+\infty)\right)$$

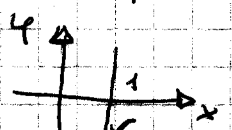
$\Rightarrow$ se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y è continua

se $\alpha \neq \pi/2$ ho una discontinuità eliminabile

2) CE e asintoti di $y = (x-2)\, e^{\frac{x}{x-1}}$

CE : $(-\infty, 1)\,(1, +\infty)$

$\lim_{x \to 1^-} y = 0^-$  $(-1 \cdot e^{-\infty})$

$\lim_{x \to 1^+} y = -\infty$  $(-1 \cdot e^{+\infty})$

$\lim_{x \to \pm\infty} y = \pm\infty$ (del I° ordine) $(\pm\infty \cdot e^1)$

$\lim_{x \to \pm\infty} y/x = e$ (m event. asintoto obliquo)

$\lim_{x \to \pm\infty} (y - ex) = -e \Rightarrow y = ex - e$ as. obl.

$$(x-2)e^{\frac{x}{x-1}} - ex = x\left(e^{\frac{x}{x-1}} - e\right) - 2e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$= xe\left(e^{1/(x-1)} - 1\right) - 2e^{x/(x-1)} \sim \frac{x}{x-1} \cdot e - 2e$$

3) Data $y = \log^3(3x^2+1)$ scrivere l'equaz delle tangente nel suo pto di ascissa $x_0 = -1$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y(x_0) = \log^3(3(-1)^2+1) = \log^3 4$$

$$y' = 3\log^2(3x^2+1) \cdot \frac{1}{3x^2+1} \cdot 6x$$

$$m = y'(x_0) = 3\log^2 4 \cdot \frac{1}{\cancel{4}} \cdot (-\cancel{6}^{\,3}) = -9\log^2 4$$

5) Scrivere i primi 4 termini $(\neq 0)$ dello sviluppo di McLaurin di

$$y = \cos(3x) - e^{2x}$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + \dots$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots$$

$$y = \cancel{1} - \frac{9x^2}{2} + \frac{\cancel{81}^{27} x^4}{\cancel{24}_{8}} + \dots - (\cancel{1} + 2x + \frac{\cancel{4}^{2} x^2}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{8}^{4} x^3}{\cancel{6}_{3}} + \frac{\cancel{16}^{2} x^4}{\cancel{24}}$$

$$= -2x - \left(\frac{9}{2} + 2\right)x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \left(\frac{27}{8} - \frac{2}{3}\right)x^4 + \dots$$

$$= -2x - \frac{13}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{65}{24}x^4 + \dots$$

4) Data $y = \sqrt[3]{27x^3 - 9x^2} - 3x$

derivare e studiare la natura di $(0,0)$

$$y' = \frac{81x^2 - 18x}{3\sqrt[3]{(27x^3-9x^2)^2}} - 3$$

la y' non è definita nell'origine

osservo che in $U(0)$ l'espressione

$$\frac{81x^2 - 18x}{3\sqrt[3]{(27x^3-9x^2)^2}}$$ si comporta come

$$\frac{-\cancel{18}^{6}x}{\cancel{3}\sqrt[3]{81x^4}} = \frac{-6}{3\sqrt[3]{3x}}$$

quindi $y' \to +\infty$ per $x \to 0^-$

$y' \to -\infty$ per $x \to 0^+$

$\Rightarrow$ nell'origine c'è una cuspide