MdC - online 15/3/2014

Cognome e nome
Matr
Firma

1) Scrivere l'eq. della retta tangente a $y = \frac{\log(x+1)}{x-1}$ nel suo punto di ascissa 2

2) Data $\begin{cases} y = e^{-x} & \text{per } x \geq 0 \\ y = x^2 + \alpha x + \beta & \text{per } x < 0 \end{cases}$ $(\alpha \text{ e } \beta \in \mathbb{R})$

a) esistono valori di α e β per cui è continua?
b) ove è continua è sempre derivabile?

3) Trovare CE ed asintoti di

$$y = x - \sqrt{\frac{x+1}{4x-1}}$$

4) Studiare $y = \sqrt[3]{x^2-4}$ in un intorno di $x = 2$ per determinare la natura del punto $(2,0)$

5) Disegnare una funzione definita per $x \neq 0$ per cui valgano le seguenti proprietà:
a) sia dispari
b) $y = x$ sia asintoto obliquo
c) sia sempre crescente

1)

$$y = f(x) \qquad (x_0, y_0) \qquad y'(x_0)$$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \qquad y_0 = y(2) = \log 3$$

$$y = \frac{\log(x+1)}{x-1} \qquad y' = \frac{\frac{1}{x+1}(x-1) - \log(x+1)}{(x-1)^2}$$

$$y'(2) = \frac{\frac{1}{2+1}(2-1) - \log(2+1)}{(2-1)^2} = \frac{1}{3} - \log 3$$

$$y - \log 3 = \left(\frac{1}{3} - \log 3\right)(x-2)$$

2)

$$y(0) = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \to 0} (x^2 + \alpha x + \beta) = \beta$$

$\Rightarrow$ f è continua per $\beta = 1$ e α qualsiasi

$$\begin{cases} y = e^{-x} & x \geq 0 \\ y = x^2 + \alpha x + 1 & x < 0 \end{cases}$$ è continua per ogni α

$$\begin{cases} y' = -e^{-x} & x \geq 0 \\ y' = 2x + \alpha & x < 0 \end{cases}$$

Parto dal caso $\beta = 1$ perché se non è continua non è derivabile

$$y'(0) = -e^0 = -1$$

$$\lim_{x \to 0} (2x + \alpha) = \alpha$$

$\Rightarrow$ f è derivabile in $x = 0$ solo per

$\beta = 1$ e $\alpha = -1$

3)

$$y = x - \sqrt{\frac{x+1}{4x-1}}$$

CE $\frac{x+1}{4x-1} \geq 0$ e $4x \neq 1$

$(-\infty, -1] \; (\frac{1}{4}, +\infty)$

$\lim_{x \to \pm\infty} y = \pm\infty$

è infinito di I° ordine

$\Rightarrow$ probabile asintoto obliquo

$\lim_{x \to \frac{1}{4}} y = -\infty$

$\Downarrow$

$x = \frac{1}{4}$ asintoto verticale

$y(-1) = -1$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{4x-1}}\right) = 1 \quad (= m)$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} (y - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\cancel{x} - \sqrt{\frac{x+1}{4x-1}} - \cancel{x}\right) = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ $y = x - \frac{1}{2}$ asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$

4) $y = \sqrt[3]{x^2-4}$ è definita su $\mathbb{R}$

passa per $(2,0)$

$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2-4)^2}} \cdot 2x$ non è definita in $x=2$

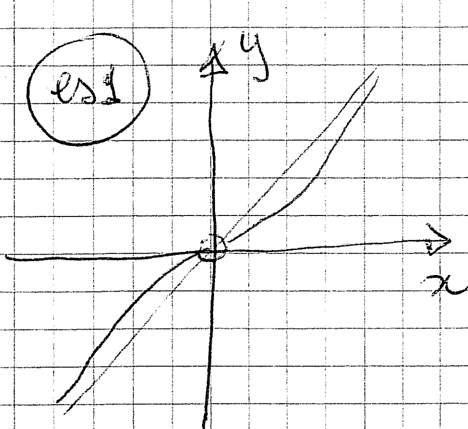
per $x \to 2$ $\quad y' \to +\infty$ ed è positiva a sinistra e destra di $x=2$

$\Longrightarrow$ in $x=2$ c'è un flesso a tangente verticale

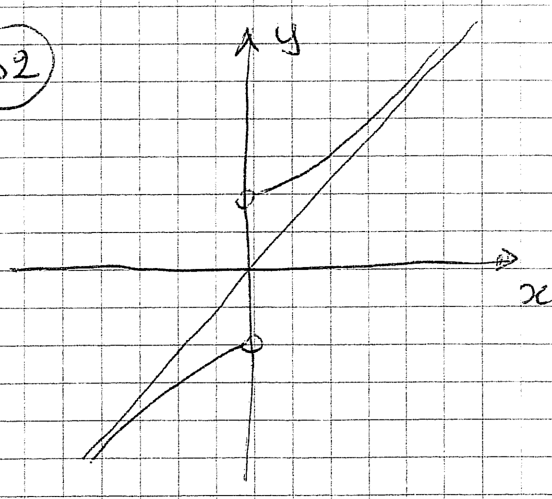
5) – se f è dispari è simmetrica rispetto all'origine (ove non è definita)

– se deve essere sempre crescente sarà nel 1° e terzo quadrante

es1



es2



es3