MdC 9/5/14 4

Cognome Nome Matr

1) Determinare il coeff di x^3 nello sviluppo di McLaurin di

$$y = \log(3+x+x^2)$$

2) fornire una ragionevole spiegazione del fatto che diverge a $+\infty$ la succ

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{2} a_n + 1 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

3) Qual'è la funzione generatrice associata a

$$a_n = 3 \cdot 5^n - 4 \cdot 3^n \ ?$$

4) Discutere la convergenza puntuale e uniforme su $[0,1]$ di

$$\{ n x^2 e^{-nx} \}$$

5) $$\int \frac{3x-2}{(x-1)(x^2-2x+2)}\,dx$$

6) $$\int_0^{+\infty} (x^2-3x)\,e^{-2x}\,dx$$

7) $$y'(x^2+1) = \operatorname{tg} y$$

④ 9/5/14/ ①

1) $y = \log(3 + x + x^2)$ coeff di x^3 nello sviluppo di Mc Laurin

a) posso calcolare y', y'' e y'''

quindi $y'''(0)$

segue che il coeff di x^3 è $\frac{1}{3!} y'''(0)$

b) oppure $y = \log\left[3\left(1 + \frac{x+x^2}{3}\right)\right] =$

$$= \log 3 + \log\left(1 + \frac{x+x^2}{3}\right)$$

da $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \dots$ con $t = \frac{x+x^2}{3}$

il coeff di x^3 deriva da $\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{x+x^2}{3}\right)^2}_{\frac{1}{2}\frac{2}{9}}$

e $\underbrace{\frac{1}{3}\left(\frac{x+x^2}{3}\right)^3}_{\frac{1}{81}}$

2)
$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{2} a_n + 1 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

per $\forall n \geq 1$ $a_n \geq 0$

$a_1 = 1$ $a_2 = \frac{3}{2} + 1 = 2 + \frac{1}{2}$ $a_3 = a_2 \cdot \frac{3}{2} + 1 =$

$= \frac{3}{2}\left(2 + \frac{1}{2}\right) + 1 = 3 + \frac{3}{4} + 1 = 4 + \frac{3}{4}$ ecc...

$a_1 \geq 1$, $a_2 > 2$, $a_3 > 3$, ..., $a_n > n$, ...

dimostrabile anche per induzione

④ 9/5/14 / ②

3) $a_n = 3\cdot 5^n - 4\cdot 3^n$

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} (3\cdot 5^n - 4\cdot 3^n)x^n =$$

$$= 3\cdot\sum_{n\geq 0} 5^n x^n - 4\cdot\sum_{n\geq 0} 3^n x^n =$$

$$= \frac{3}{1-5x} - \frac{4}{1-3x}$$

4) $\{n x^2 e^{-nx}\}$ $[0,1]$

a) fissato $0\leq \bar{x}\leq 1$ $\{n\bar{x}^2 e^{-n\bar{x}}\}$

converge a zero per $n\to+\infty$

$\Rightarrow$ convergenza puntuale a $y=0$

b) fissato $\bar{n}$

$y_{\bar{n}} = \bar{n}x^2 e^{-\bar{n}x}$ com'è su $[0,1]$?

$y_{\bar{n}}(0) = 0$ $y_{\bar{n}}(1) = \bar{n}\,e^{-\bar{n}}$

$$y'_{\bar{n}} = 2x\bar{n}\,e^{-\bar{n}x} - \bar{n}^2x^2e^{-\bar{n}x}$$

$$= x\bar{n}\,e^{-\bar{n}x}(2-\bar{n}x)$$

in $x = \frac{2}{\bar{n}}$ c'è un max e

quota $y_{\bar{n}}\left(\frac{2}{\bar{n}}\right) = \bar{n}\,\frac{4}{\bar{n}^2}\,e^{-\bar{n}\frac{2}{\bar{n}}} = \frac{4}{\bar{n}}e^{-2}$

questo è anche il $\sup|f_n - f|$

che tende a zero per $n\to+\infty$

$\Rightarrow$ ok conv. uniforme.

5) $\int \frac{3x-2}{(x-1)(x^2-2x+2)}\,dx$

$$\frac{3x-2}{(x-1)(x^2-2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+2}$$

6) $\int_0^{+\infty} (x^2-3x)\, e^{-2x}\,dx$

1°) per parti $\int (x^2-3x)\, e^{-2x}\,dx$

ottengo $F(x)+C$

2°) calcolo

$\lim_{\bar{x}\to+\infty} \left[F(x)\right]_0^{\bar{x}} = \dots$

7) $y'(x^2+1) = \operatorname{tg} y$

$$\frac{dy}{dx}(x^2+1) = \operatorname{tg} y$$

$$\frac{dy}{\operatorname{tg} y} = \frac{dx}{x^2+1}$$

$$\int \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\,dy = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$