

1) Dato

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin(3x)} - 1}{\ln(1+\arctan(2x))} \quad \left(\text{Nota che } \arctan(0)=0 \right)$$

trovare il limite (a) sia usando le stime asintotiche

(b) che usando il teorema di De L'Hopital

2) Determinare l'equazione della retta tangente alla curva $f(x) = \ln\left(\frac{x^{2x}}{e^2}\right)$ nel punto $x_0 = e^2$.

3) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(2x)}{x} & \text{se } x < 0 \\ e^x(ax+b) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

studiare la continuità e la derivabilità in $x=0$ determinando i valori di "a" e "b".4) Data la funzione $y = \frac{x^3}{x^2-1}$, studiare:

(a) C.E., segno ed intersezioni con gli assi;

(b) limiti ed asintoti;

(c) crescere/decrescere, i punti stazionari, massimo e minimo (trovando la derivata prima);

(d) concavità (trovando la derivata seconda);

(e) con le informazioni ottenute, disegnare la funzione.

5) Scrivere lo sviluppo di MacLaurin di ordine 4 per

$$f(x) = (4-3x^2)\sin(3x) - 2x^2e^{2x} - 12x + 2x^2 \text{ usando gli sviluppi di MacLaurin: } \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots, e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

6) Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 4 centrato in $x_0 = \frac{\pi}{12}$ per $f(x) = \sin(2x)$ usando la formula: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4 + \dots$

Ogni risposta deve essere giustificata!