

3+4

1) Dato $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin(3x)} - 1}{\ln(1+\arctan(2x))}$ (Notare che $\arctan(0)=0$)

trovare il limite (a) sia usando le forme asymptotiche;
(b) che usando il teorema di De L'Hôpital

2) Data la funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(2x)}{x} & \text{se } x < 0 \\ e^x(ax+b) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

studiare la continuità e la derivabilità in $x=0$ determinando i valori di "a" e "b".

3) Scrivere lo sviluppo di Maclaurin di ordine 4 per la funzione $f(x) = (4-3x^2)\sin(3x) - 2x^2e^{2x} - 12x + 2x^2$ usando gli sviluppi di Maclaurin: $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

4) $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln(x)}{x(1+4\ln^2(x))} dx = ?$

5) $\int_0^{\pi/2} e^{2x} \sin(3x) dx = ?$

6) Calcolare l'integrale improprio e determinare se converge o diverge:

$$\int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x}(2x+1)} dx$$

(Notare che $\lim_{R \rightarrow +\infty} \arctan(R) = \frac{\pi}{2}$ e $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$)

7) Risolvere il problema di Cauchy e trovare la soluzione generale:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2x + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -5 \end{cases}$$

Ogni risposta deve essere giustificata!