

(4)

1) Trovare una forma esplicita di a_n usando $A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ e

$$\frac{1}{1-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} (ax)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n$$

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_n = 5a_{n-1} + 4, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

2) Studiare la convergenza di $\{f_n(x)\} = \left\{ \frac{nx}{1+n^2x^2} \right\}$ con $x \in [0,1]$

(a) Converge puntualmente? Se sì, indicare dove.

(b) Converge uniformemente? Se sì, indicare dove.

[Notare che f_n è continua su $[0,1]$ quindi per il teorema di Weierstrass f_n ammette massimo.]

3) $\int_0^{\pi/2} e^{2x} \sin(3x) dx = ?$

4) $\int \frac{x-1}{x^4+x^2} dx = ?$

5) $\int \frac{\sqrt{1-x} + 3}{\sqrt{1-x} + 1} dx = ?$

6) Calcolare l'integrale improprio e determinare se converge o diverge:

$$\int_0^{+\infty} \frac{2 \arctan(x)}{1+x^2} dx$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Notare che} \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \arctan(R) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right]$$

7) Risolvere il problema di Cauchy e trovare la soluzione generale:

$$\begin{cases} y'' - 4y' - 5y = e^{-x} \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = \frac{11}{6} \end{cases}$$

(ricordarsi che la soluzione particolare è della forma $y_p(x) = Ax e^{-x}$)

Ogni risposta deve essere giustificata!