

3+4

1) Data la funzione

$$f(x) = e^{\ln\left(1 + \frac{2\sin(3x)}{\cos(3x)+1}\right)}$$

[ricordarsi che
 $\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$]

(a) Trovare la derivata $f'(x)$.(b) Determinare l'equazione della retta tangente alla curva $f(x)$ in $x_0=0$.

2) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\cos(x^3) & x \leq 0 \\ 2 - x^2 & 0 < x < 1 \\ a\ln(x^2) + b & x \geq 1 \end{cases}$$

trovare i valori di "a" e "b" in modo tale che f sia continua e derivabile in $x=0$ e in $x=1$.3) Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 3 centrato in $x=0$ per

$$f(x) = \ln(1 + \sin(x))$$

[ricordarsi che
 $\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$]

(a) sia usando la formula di Taylor: $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \dots$ (b) che usando gli sviluppi di Maclaurin: $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

(c) coincidono i due risultati?

4)

$$\int_0^{\pi/4} \frac{3 \sin(x)}{\cos(x)(1+\cos^2(x))} dx$$

[scrivere il risultato usando le proprietà dei
 logaritmi $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ e $\ln(a^b) = b\ln(a)$ e
 usando il maggior numero di semplificazioni, e
 ricordarsi che $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos(0) = 1$ e $\ln(1) = 0$.]

5)(a) Calcolare l'integrale improprio e determinare se converge o diverge

$$\int_0^{-\infty} (2x-1)e^{-x} dx$$

$$(b) \int 2x \ln(x-5) dx = ?$$

6) Risolvere il problema di Cauchy e trovare la soluzione generale:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2x + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -5 \end{cases}$$

(ricordarsi che la soluzione particolare
 è della forma $y_p(x) = ax^2 + bx + c$)

Ogni risposta deve essere giustificata!