

3+4

1) Dato

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1 + \ln(1+4x)} - 1}{e^{\arctan(3x)} - 1}$$

(Notare che $\arctan(0) = 0$)

trovare il limite (a) sia usando le stime asintotiche ;

(b) che usando il teorema di De L'Hôpital

2) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3e^x & x \leq 0 \\ \sin(3x) + 3 & 0 < x < 2\pi \\ a \ln\left(\frac{x-\pi}{\pi}\right) + b & x \geq 2\pi \end{cases}$$

studiare la continuità e la derivabilità in $x=0$ e in $x=2\pi$ e determinare i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ affinché f sia continua e derivabile in $x=0$ e in $x=2\pi$.

3) Calcolare il limite utilizzando gli sviluppi di MacLaurin:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x \sin(x)) - e^{x^2} + 1}{\sqrt{1+2x^4} - 1}$$

4) $\int \frac{\sqrt{1-x} + 3}{\sqrt{1-x} + 1} dx = ?$

5) $\int_0^{\pi/2} e^{2x} \sin(3x) dx = ?$

6) Calcolare l'integrale improprio e determinare se converge o diverge:

$$\int_0^{+\infty} \frac{2 \arctan(x)}{1+x^2} dx$$

(Notare che $\lim_{R \rightarrow +\infty} \arctan(R) = \frac{\pi}{2}$)

7) Risolvere il problema di Cauchy e trovare la soluzione generale:

$$\begin{cases} y'' - 4y' - 5y = e^{-x} \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = \frac{11}{6} \end{cases}$$

[ricordarsi che la soluzione particolare è della forma $y_p(x) = A x e^{-x}$]

Ogni risposta deve essere giustificata!