"Come si fa" a svolgere vari tipi di esercizi
3 – spazi vettoriali

(algoritmi – avvertenze – casi speciali – esempi)

Attenzione… gli argomenti sono in un ordine tale che si può "partire dall'inizio", ma che non è quello delle dispense: gli esempi sono pensati per essere svolti al termine della teoria. Quindi si usa il metodo migliore per risolverli, anche se nella teoria tale metodo è presentato più avanti dell'argomento.

Alcuni degli esercizi presentati erano parte di temi d'esame, e le lettere che compaiono hanno i seguenti significati:

data di nascita (**G**/**M**/**A**) g:= (G mod 5) + 4; m:= (M mod 6) + 2;

Determinante e matrice inversa di una matrice quadrata

Metodo di calcolo del determinante di una matrice quadrata **A**:
Il migliore è basato su un teorema che ne consente il calcolo ricorsivo:

Teorema di Laplace: Risulta $\det \mathbf{A} = \det [a_{ij}] = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{A}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{A}_{ij}$,

ove $\mathbf{A}_{ij}$ è detto **complemento algebrico** dell'elemento a_{ij}, ed è il determinante della sottomatrice di **A** ottenuta da **A** togliendo la riga i–esima e la colonna j–esima, moltiplicato per $(-1)^{i+j}$.
Il calcolo del determinante di una matrice di ordine n è quindi riportato al calcolo di n determinanti di matrici di ordine n–1; inoltre, se prima del calcolo si trasforma la matrice in matrici più semplici, mediante proprietà che non cambiano il determinante (vedi teoria), il calcolo è agevolato.

In particolare $\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$.

Teorema: (di Binet) Risulta det **AB** = det **A** det **B**.

Conseguenza del teorema di Binet è la condizione per l'esistenza della **matrice inversa** di una data matrice **A**: la matrice inversa $\mathbf{A}^{-1}$ di una matrice **A**, se esiste, è la matrice tale che risulti

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}.$$

Allora è anche

$$\det(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^{-1}) \det \mathbf{A} = \det \mathbf{I} = 1,$$

quindi la matrice **A** deve aver determinante invertibile perché possa esistere $\mathbf{A}^{-1}$. Se gli elementi della matrice sono in un campo, questo implica $\det \mathbf{A} \neq 0$, se sono in un anello, implica che det **A** sia un elemento **invertibile** dell'anello.

Per il **calcolo effettivo**: Se $\mathbf{A} = [a_{ik}]$, risulta $\mathbf{A}^{-1} = \left[\dfrac{A_{ki}}{\det \mathbf{A}}\right]$,cioè che la matrice inversa è la **trasposta** della matrice che ha per elementi i complementi algebrici divisi per il determinante. (la trasposta di una matrice è la matrice ottenuta "ruotando" la matrice, cioè la riga di posti i diventa la colonna di posto i)

Esempio 1: Calcolare il determinante della matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Il determinante vale $\det \mathbf{A} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2$. La formula vale in qualsiasi campo dei coefficienti, ma se per esempio gli elementi fossero in Z_5, il valore -2 trovato andrebbe riportato in Z_5, quindi $\det \mathbf{A} \equiv 3$.

Esempio 2: Calcolare il determinante della matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$.

Per il calcolo di det**A** mediante il teorema di Laplace *conviene* utilizzare una riga o una colonna che contenga degli zeri, per fare meno calcoli (ma il risultato è sempre lo stesso). Considerando quindi per esempio la seconda colonna, risulta:

$$\det\mathbf{A} = \mathbf{(-1)^{1+2}}\cdot 2\cdot\det\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \mathbf{(-1)^{2+2}}\cdot 0\cdot\det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \mathbf{(-1)^{3+2}}\cdot 4\cdot\det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= -2\,(-3-2) - 4(1+3) = -6.$$

Esempio 3: Calcolare il determinante della matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

La matrice assegnata ha nella prima riga (per esempio) uno 0; sarebbe comodo avere più di uno zero, cosa che si può ottenere con le trasformazioni:

- 2° colonna ⇦ 2° colonna –2 · 1° colonna
- 4° colonna ⇦ 4° colonna – 1° colonna

Allora det **A** = $\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & -4 \end{bmatrix} = 1\cdot\det\begin{bmatrix} -5 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ Potremmo usare lo stesso metodo, ma il calcolo dei determinanti delle matrici quadrate di ordine 3 non sono complicati, quindi si ha, sviluppando rispetto alla prima colonna:

$$\det\mathbf{A} = \mathbf{(-1)^{1+1}}\cdot(-5)\cdot(-4-1) + \mathbf{(-1)^{2+1}}\cdot 2(-12+1) + \mathbf{(-1)^{3+1}}\cdot(-4)(3+1) = -5\cdot(-5) - 2\cdot(-11) - 4\cdot(4) = 25+22-16 = 31$$

Esempio 4: Calcolare l'inversa della matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$.

La matrice è la medesima dell'esercizio 2, e si è già calcolato che ha determinante –6, quindi non nullo. Calcoliamo i complementi algebrici degli elementi.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = -4,\ A_{12} = (-1)^{1+2}\det\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 5,\ A_{13} = (-1)^{1+3}\det\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 12$$

$$,\ A_{21} = (-1)^{2+1}\det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = -2,\ A_{22} = (-1)^{2+2}\det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 1,\ A_{23} = (-1)^{2+3}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 0$$

$$,\ A_{31} = (-1)^{3+1}\det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2,\ A_{32} = (-1)^{3+2}\det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = -4,\ A_{33} = (-1)^{3+3}\det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2.$$

Allora la matrice inversa richiesta è: $\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ -2 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

Esempio 5: Si consideri la matrice ad elementi in Z_m $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ h & 7 \end{bmatrix}$ ove h è un parametro di Z_m. Determinare tutti i valori di h per cui $\mathbf{A}$ è invertibile.

Il determinante Δ della matrice vale $14-h$. I casi possibili, a seconda di m sono:

$m = 2 \Rightarrow \Delta = -h \Rightarrow \mathbf{A}$ invertibile solo per $h = 1$.

$m = 3 \Rightarrow \Delta = 2-h \Rightarrow \mathbf{A}$ invertibile solo per $h = 0, 1$

$m = 4 \Rightarrow \Delta = 2-h \Rightarrow \mathbf{A}$ invertibile solo per $h = 1, 3$

$m = 5 \Rightarrow \Delta = 4-h \Rightarrow \mathbf{A}$ invertibile solo per $h = 0, 1, 2, 3$

$m = 6 \Rightarrow \Delta = 2-h \Rightarrow \mathbf{A}$ invertibile solo per $h = 1, 3$

$m = 7 \Rightarrow \Delta = -h \Rightarrow \mathbf{A}$ invertibile solo per $h = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Esercizi

- Calcolare i determinanti e le inverse delle seguenti matrici:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2,\ -2,\ -6,\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

- Si consideri la matrice ad elementi in $\mathbf{Z}_8$ $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ h & 12 \end{bmatrix}$ ove h è un parametro di $\mathbf{Z}_8$. Determinare tutti i valori di h per cui $\mathbf{A}$ è invertibile e per il più piccolo $h>0$ per cui è invertibile, determinare l'inversa.

Invertibile per $h = 1, 3, 5, 7$ Inversa per $h=1$ $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

Spazi vettoriali e sottospazi

Per le definizioni, vedi dispense.

Criterio: Sia V *spazio vettoriale sul campo* $\boldsymbol{K}$. W $\subseteq$ V è sottospazio vettoriale di V sul campo $\boldsymbol{K}$ se *comunque presi* due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ di W e due scalari h e k di $\boldsymbol{K}$, risulta

$$h\mathbf{x}+k\mathbf{y}\in W.$$

Vale una **condizione necessaria**: che il sottoinsieme contenga il vettore nullo.

Esempio 1: in Q^2 su Q il sottoinsieme delle coppie $(a, 2a)$ è sottospazio?

(0, 0) appartiene? sì basta prendere $a = 0$, quindi vale la condizione necessaria.

Criterio: $h(a, 2a)+k(b, 2b) = (ha+kb, 2ha+2kb) = (ha+kb, 2(ha+kb))$ sì , quindi è sottospazio.

Esempio 2: in $M_{2\times2}[Z_7]$ su Z_7 le matrici della forma $\begin{bmatrix} a & b \\ a+b & a-b \end{bmatrix}$ formano sottospazio?

Condizione necessaria $a=0$, $b=0$ sì

Criterio: $h\begin{bmatrix} a & b \\ a+b & a-b \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} c & d \\ c+d & c-d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ha+kc & hb+kd \\ h(a+b)+k(c+d) & h(a-b)+k(c-d) \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} ha+kc & hb+kd \\ (ha+kc)+(hb+kd) & (ha+kc)-(hb+kd) \end{bmatrix}$ sì , quindi è sottospazio.

Esempio 3: in $\mathbb{Q}^2[x]$ su $\mathbb{Q}$ i polinomi del tipo $ax^2+2ax+3a$ è sottospazio?
Condizione necessaria $ax^2+2ax+3a$ sì, ponendo $a = 0$
Criterio:
$h(ax^2+2ax+3a)+k(bx^2+2bx+3b)=(ha+kb)x^2+2(ha+kb)x+3(ha+kb)$ sì , quindi è sottospazio.

Esercizi Quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi?

- L'insieme dei polinomi di grado esattamente 2, a coefficienti reali, è spazio vettoriale su $\mathbb{R}$? No
- in $\mathbb{Q}^2$ su $\mathbb{Q}$ il sottoinsieme delle coppie $(a, 3)$ No
- in $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_5$ su $\mathbb{Z}_5$ il sottoinsieme delle coppie $(0,a)$ è sottospazio Sì
- in $\mathbb{Q}^2[x]$ su $\mathbb{Q}$ i polinomi con termine noto 0 è sottospazio? Sì
- in $\mathbb{Q}^2$ su $\mathbb{Q}$ il sottoinsieme delle coppie $(a, a+1)$ No
- in $\mathbb{Q}^2$ su $\mathbb{Q}$ il sottoinsieme delle coppie $(a, -12a)$ Sì
- in $\mathbb{Q}^2$ su $\mathbb{Q}$ il sottoinsieme delle coppie (a, a^2) No
- in $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_5$ su $\mathbb{Z}_5$ il sottoinsieme delle coppie $(2a, a)$ Sì
- in $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_5$ su $\mathbb{Z}_5$ il sottoinsieme delle coppie (a, a^2) No
- in $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_5$ su $\mathbb{Z}_5$ il sottoinsieme delle coppie $(a, a+1)$ No
- in $M_{2\times2}[\mathbb{Z}_7]$ su $\mathbb{Z}_7$ le matrici della forma $\begin{bmatrix} a & a \\ 0 & a \end{bmatrix}$ Sì
- in $M_{2\times2}[\mathbb{Z}_7]$ su $\mathbb{Z}_7$ le matrici della forma $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Sì
- in $M_{2\times2}[\mathbb{Z}_7]$ su $\mathbb{Z}_7$ le matrici della forma $\begin{bmatrix} a & 2a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ No
- in $M_{2\times2}[\mathbb{Z}_7]$ su $\mathbb{Z}_7$ le matrici della forma $\begin{bmatrix} a & b \\ 2a & 5b \end{bmatrix}$ Sì
- in $M_{2\times2}[\mathbb{Z}_7]$ su $\mathbb{Z}_7$ le matrici invertibili No
- in $M_{2\times2}[\mathbb{Z}_7]$ su $\mathbb{Z}_7$ le matrici non invertibili No
- in $\mathbb{Z}_5^2[x]$ su $\mathbb{Z}_5$ i polinomi senza termine di primo grado. Sì
- in $\mathbb{Z}_5^2[x]$ su $\mathbb{Z}_5$ i polinomi monici. No
- in $\mathbb{Q}^2[x]$ su $\mathbb{Q}$ i polinomi con radici 3 e 5. Sì
- in $\mathbb{Q}^2[x]$ su $\mathbb{Q}$ i polinomi ax^2+bx+c tali che $a=2b$ Sì
- in $\mathbb{Q}^2[x]$ su $\mathbb{Q}$ i polinomi ax^2+bx+c tali che $a=b^2$ No
- in $\mathbb{Q}^2[x]$ su $\mathbb{Q}$ i polinomi con radici coincidenti. No
- in $\mathbb{Q}^2[x]$ su $\mathbb{Q}$ il sottoinsieme dei multipli della coppia (1,2) Sì

Sistemi di generatori, basi e componenti di un vettore

Riguardare sulla teoria le definizioni di: **sistema di generatori** e **componenti**

insieme linearmente indipendente (o **insieme di vettori linearmente indipendenti**)
base (in particolare, **base canonica**) e **dimensione**

I teoremi e le proprietà importanti su questo argomento sono:

- Se D $=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è un insieme di vettori linearmente dipendenti di V **esiste** un vettore $\mathbf{v}_i \in$ D che è combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_j$, con $j < i$, cioè che lo precedono. Un teorema analogo si può enunciare con la condizione $j > i$.
- Teorema (di **estrazione di una base**) Sia V spazio vettoriale su K e sia G$=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un sistema di generatori di V. Da G si può **estrarre** una base B per V.
- Teorema (della **dimensione**). Sia V spazio vettoriale su K e sia B una base per V. Se B è costituita da n vettori, **ogni** altra base di V è costituita da n vettori.
- Teorema Sia V spazio vettoriale su K di dimensione n, due delle tre condizioni :

  G è insieme generatore   G è insieme indipendente   G è costituito da n vettori

  implicano la terza.

  Quindi in particolare: n vettori indipendenti sono una base e n vettori generatori sono una base.
- Dati n vettori di uno spazio vettoriale di dimensione n, i vettori sono linearmente indipendenti se lo sono le loro componenti in una base qualsiasi.
- Dati n vettori di uno spazio vettoriale di dimensione n, i vettori sono linearmente indipendenti se la matrice quadrata ottenuta accostando le n–ple delle componenti in una base qualsiasi **ha determinante non nullo**.
- Teorema (di **completamento della base**). Sia V spazio vettoriale su K di dimensione n, e sia I un insieme indipendente costituito da k vettori. **Esiste** una base di V costituita dai k vettori di I e da n-k vettori presi da una base **qualsiasi** di V.

Esempio 1: In R^2 sono sistemi di generatori gli insiemi

$$S_1=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right\}\ ;\qquad S_2=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right\}\ \text{ e }\qquad S_3=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}\ ?$$

In caso affermativo determinare le componenti di $\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix}$ in tali sistemi di generatori. Le componenti sono univocamente determinate ?

S_1: i vettori dati sono 2, quindi basta che siano indipendenti perché siano base (e quindi generatori) ed essendo $\det\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}=1\neq 0$ la proprietà è vera. In altro modo, si può vedere per quali valori di x e y risulta $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ ⇨ $\begin{cases}a=x+2y\\b=x+y\end{cases}$ ⇨ $\begin{cases}a-b=y\\x=b-(a-b)=2b-a\end{cases}$. Avendo trovato i due valori, si conclude che S_1 è sistema di generatori e $\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix}=-6\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$. La rappresentazione è unica perché si ha una base.

S_2 : No, si ottengono solo vettori con i due elementi uguali

S_3 : La risposta è sì, poiché il primo e terzo vettore sono indipendenti e quindi una base, ma è

$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ ⇨ $\begin{cases}a=x+2y\\b=x+2y+z\end{cases}$ ⇨ $\begin{cases}z=b-a\\x+2y=a\end{cases}$ ⇨ $\begin{cases}x=a-2k\\y=k\\z=b-a\end{cases}$ quindi non c'è univocità di componenti e infatti $\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix}=(4-2k)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

Esempio 2: In Q $^2[x]$ sono sistemi di generatori: $\{x^2+1, 2x, x+3, 1\}$ e $\{x^2+x, x, 1-x\}$?

Posto $ax^2+bx+c = h(x^2+1)+k(2x)+m(x+3)+n(1)$ si ricava $\begin{cases}a=h\\b=2k+m\\c=h+3m+n\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}h=a\\m=b-2k\\n=c-a-3b+6k\\k=k\end{cases}$

quindi il primo è sistema di generatori, ed essendo 4 non sono indipendenti, poiché Q $^2[x]$ ha dimensione 3 (la base canonica è x^2, x, 1).
Il secondo insieme è costituito da 3 vettori, quindi basta vedere se sono indipendenti. La matrice delle componenti nella base canonica (scritte per colonne) è $\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$ il cui determinante vale 1, quindi la risposta è affermativa.

- **Esempio 3:** in $\mathbb{Q}^2[x]$ su $\mathbb{Q}$ considerare il sottospazio generato dai polinomi $\mathbf{z}=2x^2+x+1$, $\mathbf{w}=x+1$, $\mathbf{u}=x^2+x+1$, $\mathbf{v}=x^2$. Dal sistema di generatori ricavare una base. Completare tale base con opportuni vettori della base canonica in modo da avere una base di tutto lo spazio.

$\mathbf{v}=x^2$, $\mathbf{w}=x+1$, sono sicuramente indipendenti perché di gradi diversi mentre si osserva che

$$\mathbf{z} = 2\mathbf{v}+\mathbf{w} = 2x^2+x+1, \qquad \mathbf{u} = \mathbf{v}+\mathbf{w} = x^2+x+1.$$

Il sottospazio ha quindi dimensione 2. Completiamo l'insieme indipendente in modo da avere una base, prendendo i vettori dalla base canonica di Q $^2[x]$.
Se si considerano i tre vettori $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, x\}$ si ha una base perchè i vettori sono 3 e sono indipendenti infatti x non è combinazione lineare dei vettori che lo precedono. Verifica: $x = h\,x^2 + k(x+1) \Rightarrow$

$h\,x^2+(k-1)\,x+k=0 \Rightarrow h=0 \quad k=1 \quad 1=0 \Rightarrow$ *falso* oppure, più semplicemente, $\det\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}=-1\neq 0$

Si verifica allo stesso modo che anche $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, 1\}$ è una base.

Esempio 4: In R ^{3} si considerino i tre vettori $\begin{bmatrix}1\\5\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\k\\0\end{bmatrix}$.

a) Stabilire per quali eventuali valori di k i tre vettori costituiscono una base per R ^{3}.
b) Per i valori di k per cui non sono una base, determinare quali vettori sono indipendenti e completare la base.

Se $\det\begin{bmatrix}1&2&1\\5&-2&k\\0&1&0\end{bmatrix}=-(k-5)\neq 0$ e quindi $k\neq 5$ sono una base.

I primi due vettori sono una base. **i** completa la base. (ma la potrebbe completare anche **j** e anche **k**)

Esempio 5: Si consideri il sottospazio di R ^{2} così definito: S= $\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}: 2x-y=0\right\}$ e sia B $=\left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\right\}$

una base di R^2. Dopo avere detto cosa sono le componenti di un vettore in una data base, stabilire quale legame sussiste tra le componenti u e v (rispetto a B) dei vettori che appartengono ad S.

Le componenti di un vettore in una data base sono i coefficienti della combinazione lineare dei vettori della base con cui tale vettore è espresso. Il generico vettore di S è espresso, nella base canonica dalle componenti x e y legate dalla relazione $2x - y = 0$. Se il generico vettore nella base B ha componenti u e v, questo significa che è $u\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+v\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2u+3v\\u-v\end{bmatrix}$ e dunque appartiene a S se risulta $2(2u+3v)-(u-v)=0$, da cui $3u+7v=0$, che è il legame richiesto.

Esempio 6: In R^3 si consideri la base costituita dai tre vettori **x**, **y**, **z** e la base **u**, **v**, **w** tale che sia **u** = **y** – **x** +3**z**, **v** = 2**x** +5**z** e **w** =. Determinare un vettore non nullo, se esiste che abbia le componenti nella base **u**, **v**, **w** doppie di quelle nella base **x**, **y**, **z.**
Poiché le componenti in una base sono i coefficienti della combinazione lineare dei vettori della base con cui tale vettore è espresso, la condizione richiesta è che se un vettore ha nella seconda base componenti a, b, c, nella prima deve avere componenti $2a$, $2b$, $2c$, cioè risulta
$2a\mathbf{x} + 2b\mathbf{y} + 2c\mathbf{z} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}$ $2a\mathbf{x} + 2b\mathbf{y} + 2c\mathbf{z} = a(\mathbf{y} - \mathbf{x} + 3\mathbf{z}) + b(2\mathbf{x} + 5\mathbf{z}) + c(\mathbf{x} + 3\mathbf{y})$.
Poichè la rappresentazione di un vettore in una base è unica, la relazione porta al sistema:
$\begin{cases}2a=-a+2b+c\\2b=a+3c\\2c=3a+5b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+2b+c=0\\a-2b+3c=0\\3a+5b-2c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c=-a-2b\\a=2b+3(-a-2b)\\3a+5b-2c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c=-b\\a=-b\end{cases}$, quindi soddisfano la condizione imposta i vettori le cui componenti sono legati dalle relazioni precedenti.

Esercizi

- Considerare i sottospazi seguenti e determinare un sistema di generatori per ogni sottospazio. In tutti i casi, che componenti ha il vettore nullo ? È sempre univocamente determinato ?

  - in Q^2 su Q il sottospazio delle coppie $\begin{bmatrix}a\\3a\end{bmatrix}$
  - in $\mathsf{Z}_5\times\mathsf{Z}_5$ su Z_5 il sottospazio delle coppie $\begin{bmatrix}2a\\3a\end{bmatrix}$
  - in $\mathsf{M}_{2\times2}[\mathsf{Z}_5]$ su Z_5 le matrici della forma $\begin{bmatrix}a & a\\0 & a\end{bmatrix}$
  - in $\mathsf{M}_{2\times2}[\mathsf{Z}_7]$ su Z_7 le matrici della forma $\begin{bmatrix}a & 3b\\0 & 0\end{bmatrix}$
  - in $\mathsf{M}_{2\times2}[\mathsf{Z}_3]$ su Z_3 le matrici della forma $\begin{bmatrix}a & b\\2a & 0\end{bmatrix}$
  - in $\mathsf{M}_{2\times2}[\mathsf{Z}_{11}]$ su Z_{11} le matrici della forma $\begin{bmatrix}a & b\\a+b & a-b\end{bmatrix}$
  - in $\mathsf{Z}_5^2[x]$ su Z_5 i polinomi senza termine di primo grado.
  - in $\mathsf{Q}^2[x]$ su Q i polinomi ax^2+bx+c tali che $a=2c$
  - in $\mathsf{Q}^2[x]$ su Q i polinomi con radici coincidenti.

- in $\mathbb{Q}^3$ su $\mathbb{Q}$ il sottospazio dei vettori del tipo $\begin{bmatrix} a \\ a-b \\ b \end{bmatrix}$

- In $\mathbb{Q}^2[x]$ su $\mathbb{Q}$ estrarre una base dal sistema di generatori dato.
  - x^2+1, x, $2x-1$, $3x$.
  - x^2-1, $x-1$, $x+1$, x,
  - x^2, x^2+2, $x-1$, x, 1,
  - x^2, x^2+2x-1, x, 7
- Considerare i seguenti sottospazi e il sistema di generatori assegnato. Dal sistema di generatori ricavare una base. Completare tale base con opportuni vettori della base canonica in modo da avere una base di tutto lo spazio.

  in $\mathbb{Q}^2[x]$ su $\mathbb{Q}$
  - il sottospazio generato dai polinomi x^2+2x+3, x^2+1, $2x+2$.
  - il sottospazio generato dai polinomi x^2+x, x^2+2, $x-1$, $3x^2+x+3$
  - il sottospazio generato dai polinomi x^2, x^2+2x+1, $4x+2$

  in $\mathbb{Q}^3$ su $\mathbb{Q}$
  - il sottospazio $\begin{bmatrix} a \\ a+2b \\ 3b \end{bmatrix}$ il sistema di generatori dato è $= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$
- In $\mathbb{R}^2[x]$ si considerino i tre vettori $p(x)=x^2+5x$, $q(x)= 2x^2-2x+1$, $r(x)= x^2+kx$
  - Stabilire per quali eventuali valori di k i tre vettori costituiscono una base per $\mathbb{R}^2[x]$.
  - Per i valori di k per cui non sono una base, determinare quali vettori sono indipendenti e completare la base.

Rango di una matrice

$\mathbf{A}_{n\times n}$ ⇨ $\det\mathbf{A}\neq 0$ ⇔ n vettori di $\mathbb{V}$ ($\dim\mathbb{V}=n$) sono indipendenti

Se si ha $\mathbf{M}_{n\times k}$ ($k \neq n$), si chiama **rango** di $\mathbf{M}$ e si indica con rk($\mathbf{M}$) il numero delle colonne di $\mathbf{M}$ linearmente indipendenti.

Si può dimostrare che:
- il numero di righe di una matrice indipendenti è uguale al numero di colonne indipendenti
- il rango è uguale al massimo ordine di una sottomatrice quadrata di $\mathbf{M}$ a determinante non nullo.

Il rango di una matrice non cambia se si fa una delle operazioni seguenti:
- sommare ad una riga o ad una colonna una combinazione lineare delle altre
- permutare le righe o le colonne
- sopprimere una riga o una colonna che sia dipendente dalle altre

Per il calcolo, si usa la **regola di Kronecker** che consiste nel determinare una sequenza di sottomatrici quadrate a determinante non nullo della matrice di partenza che siano ciascuna sottomatrice nella precedente: il massimo ordine che si raggiunge, provando per ogni ordine tutte le sottomatrici che contengono la matrice già individuata, è la caratteristica della matrice data.

Esempio 1: Determinare, in funzione di k, il rango della matrice $\mathbf{A}= \begin{bmatrix} 1 & k & 0 & k-1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2k & 4 & 1 & k \end{bmatrix}$

Il rango è per definizione il numero massimo di righe e di colonne indipendenti
per il calcolo regola di Kroneker:

$$\det\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix} = -2 \neq 0 \ \text{ rango almeno 2}$$

Calcoliamo il determinante delle matrici 3×3 che contengono quel minore

$$\det\begin{bmatrix}1 & k & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 2k & 4 & 1\end{bmatrix} = 1(-2) - k(3-2k) = -2-3k+2k^2 = 0 \Rightarrow k = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \begin{cases}2\\ -\frac{1}{2}\end{cases}$$

se k diverso da questi due valori rk**A**=3.

Per i due valori si deve analizzare l'altra sottomatrice 3×3 che è $\begin{bmatrix}k & 0 & k-1\\ 2 & 1 & 1\\ 4 & 1 & k\end{bmatrix}$

$$\text{se } k = 2, \Rightarrow \det\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 4 & 1 & 2\end{bmatrix} = 2(1) + (-2) = 0,$$

$$\text{se } k = \frac{1}{2} \Rightarrow \det\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2}\\ 2 & 1 & 1\\ 4 & 1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2}(-2) = \frac{3}{4} + 3 \neq 0$$

conclusione rk**A**=3 a parte k = 2 per cui rk**A**=2.

Esercizi

- Si considerino in R^3 i vettori $\begin{bmatrix}1\\0\\k\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}k\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}k+1\\k\\k+1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}k\\k-1\\k\end{bmatrix}$. Qual è, in funzione di k, la dimensione dello spazio generato da tali vettori ?

Unione, intersezione e somma di sottospazi

Formula di Grassman: dim(S+T) = dimS + dimT - dim(S∩T) (S e T sottospazi di uno stesso spazio vettoriale)

- Se S ∩T={**0**}, S+T è detto **somma diretta** di S e T ed è indicato con S⊕T
- Se V=S⊕T, S e T sono detti **sottospazi complementari** e una base dell'uno si ottiene completando, in un modo qualsiasi, una base dell'altro, quindi un sottospazio ha molti possibili complementari.
- Se V=S⊕T ogni vettore **x**∈V si può scrivere in modo unico come **x** = **s** + t, ove **s**∈S e **t**∈T e i due vettori **s** e **t** sono detti **proiezioni** di **x** sui sottospazi S e T.

Esempio 1: In R^3 si considerino i due sottospazi S e T definiti nel modo seguente. Dopo aver determinato una base per S e T, determinare la dimensione e una base di S ∩ T e di S + T.

$$\mathsf{S}=\left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\in \mathrm{R}^3 : a+2b-c=0\right\}\ ,\quad \mathsf{T}=\left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=h\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

Si può esprimere il generico vettore di S come $\left\{\begin{bmatrix}a\\b\\a+2b\end{bmatrix}\right\}$, ⇨ una base è $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$ ⇨ dim S =2

Una base di T sono i due vettori che lo generano $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ ⇨ dim T =2

Allora poiché dim(S+T) *al massimo* è 3 perché S+T è contenuto in $\mathbb{R}^3$

può essere dim(S+*T*) = dimS+ dimT – dim S ∩ T

3 = 2 + 2 – 1 oppure

2 = 2 + 2 – 2

calcoliamo S∩T . Il generico vettore di T $\begin{bmatrix}h+2k\\k\\-h\end{bmatrix}$ sta in S se le sue componenti soddisfano la relazione che definisce i vettori di S: $(h+2k)+2k+h=0$ ⇨ $2h+4k=0$ ⇨ $h=-2k$ $\begin{bmatrix}0\\k\\2k\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$ quindi dim (S∩T)= 1 quindi S+T= R^3 quindi una sua base è la canonica di R^3.

Esempio 2: In R^3 si considerino i due sottospazi S e T definiti nel modo seguente. Dopo aver determinato una base per S e T, determinare la dimensione e una base di S ∩ T e di S + T.

$$\mathsf{S}=\left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\in \mathrm{R}^3 : a+b+c=0\right\}\quad \mathsf{T}=\left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=h\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

$\mathsf{S}=\left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\in \mathrm{R}^3 : a+b+c=0\right\}$ ⇨ $\begin{bmatrix}-b-c\\b\\c\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ ⇨ dim S=2; dim T=2 perchè i due generatori sono indipendenti. Il generico vettore di T è $\begin{bmatrix}h+k\\-k\\-h\end{bmatrix}$; tale vettore sta in S se si ha $h+k-k-h=0$ che è soddisfatta per OGNI *h* e *k*. Quindi S=T.

Esempio 3: Si consideri lo spazio vettoriale $\mathrm{R}^3[x]$ e i suoi sottospazi S e T così definiti: S è generato da $x+1$, $x-1$, e x^2-1 e T è il sottospazio dei vettori ax^3+bx^2+cx+d tali che $a-b+2c=a+d=0$.
Determinare la dimensione ed una base per S, T, S ∩ T, S + T.
Lo spazio $\mathrm{R}^3[x]$ ha dimensione 4 (la sua base canonica è { x^3, x^2, x, 1}.

S è generato da $x+1$, $x-1$, e x^2-1 qual è la dimensione di S? $rk\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 3$ quindi dimS=3.

T è definito come il sottospazio dei vettori ax^3+bx^2+cx+d tali che $a-b+2c = a+d = 0$, cioè per cui $a-b+2c=0$ e $a+d=0$

⇨ $a=b-2c$, $d=-b+2c$ ⇨ il generico vettore di T ha la forma $(b-2c)x^3+bx^2+cx+(-b+2c)$

⇨ x^3+x^2-1 e $-2x^3+x+2$ sono la base canonica di T ⇨ dimT = 2

generico vettore di S è $tx^2+(h+k)x+(h-k-t)$; impongo che stia in T e quindi è

$\begin{cases} a+d=0 \\ a-b+2c=0 \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} h-k-t=0 \\ -t+2(h+k)=0 \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} -t=k-h \\ k=3h \end{cases}$ ⇨ $t=2h$ e $k=3h$ ⇨ $h(2x^2+4x-4)$ ⇨ dim S∩T =1

base S∩T: $\{2x^2+4x-4\}$. Essendo, per la formula di Grassmann, 3+2−1=4=S+T, S+T è $R^3[x]$

Esempio 4: Si consideri il sottospazio di R^3 $X=\left\{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} : a+2c=0\right\}$

a) Determinare la dimensione e una base per X.
b) Determinare due diversi sottospazi complementari di X in R^3.

Dim X = 2; infatti una base è $\begin{bmatrix} -2c \\ b \\ c \end{bmatrix} = b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Gli spazi generati rispettivamente da un vettore qualsiasi che completi la base di X, ad esempio da **i** oppure da **k** sono spazi complementari.

Esempio 5: Sia Y il sottospazio di R^4 generato dai vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, Determinare un sottospazio X di R^4, di dimensione almeno 2, tale che l'intersezione X∩Y abbia come base **w**. (si consiglia di individuare X mediante una sua base).

Esercizi

- Si considerino i due sottospazi S e T definiti nel modo seguente: Determinare la dimensione ed una base per S, T, S ∩ T, S + T.
  - In $M_{2\times 2}(Q)$ $S=\left\{\begin{bmatrix} a & a+b \\ 0 & -b \end{bmatrix}\right\}$ $T=\left\{\begin{bmatrix} x & -x \\ y & x+2y \end{bmatrix}\right\}$
  - In $M_{2\times 2}(Q)$ $S=\left\{\begin{bmatrix} 2a & b \\ a & 2b \end{bmatrix}\right\}$ $T=\left\{\begin{bmatrix} x & y \\ y+z & x+z \end{bmatrix}\right\}$
  - In $M_{2\times 2}(Q)$ $S=\left\{\begin{bmatrix} a & a+b \\ c & c+b \end{bmatrix}\right\}$ $T=\left\{\begin{bmatrix} x & 3x \\ y & x-y \end{bmatrix}\right\}$

- In R^3 $S=\left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\in\mathsf{R}^3: a-b=b+c=0\right\}$ $T=\left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=h\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$

- In R^4 sia V il sottospazio generato da $\begin{bmatrix}\mathsf{g}\\1\\\mathsf{g}\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\\mathsf{m}\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ e sia $\mathsf{W}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}: \begin{cases}x=\mathsf{m}z\\ y-2t=0\end{cases}\right\}$
  - Determinare la dimensione e una base di W e dell'intersezione V$\cap$W.
  - Determinare un sottospazio Z che sia complementare di W, cioè tale che R^4= Z+W e Z $\cap$W = $\varnothing$ (si consiglia di determinarne una base).

Omomorfismi. Nucleo e immagine

Una applicazione f : V $\to$ W è detta **omomorfismo** se per ogni $\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$ $\in$V, e ogni h, k $\in\boldsymbol{K}$ risulta

$$f(h\mathbf{v}_1+k\mathbf{v}_2) = hf(\mathbf{v}_1) + kf(\mathbf{v}_2)$$

$f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$, è una condizione necessaria perché una applicazione sia un omomorfismo.
N=Ker f ={$\mathbf{v}\in$ V : $f(\mathbf{v})=\mathbf{0}$} è detto **nucleo** di f: V $\to$ W.
I= Imf = f(V) = {$\mathbf{w}\in$ W: esiste $\mathbf{v}\in$ V per cui $f(\mathbf{v})=\mathbf{w}$ }è detta **immagine** di f: V $\to$ W.
I teoremi importanti sono:

- Se B={$\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$,...,$\mathbf{v}_n$} una base di V, f(B)={$f(\mathbf{v}_1)$, $f(\mathbf{v}_2)$, ... , $f(\mathbf{v}_n)$} è un **sistema di generatori** per f(V).
- **Teorema** di **nullità più rango**: Se dimV=n, dimV = dim Ker f + dim f(V)
- Dalla dimostrazione del teorema precedente, si ricava che i trasformati dei vettori che completano una base del nucleo sono una **base** per l'immagine.
- **Teorema**: (di **determinazione di un omomorfismo**): se B_V = {$\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$,...,$\mathbf{v}_n$} è una base per V e se $\mathbf{w}_1$,$\mathbf{w}_2$,...,$\mathbf{w}_n$ è una *qualsiasi* n-pla di vettori di W. Esiste uno e un solo omomorfismo f:V$\to$W tale che $f(\mathbf{v}_i)=\mathbf{w}_i$, per ogni i = 1, ..., n

---

Esempio 1: Si dimostri che esiste un e un solo omomorfismo f :$\mathsf{R}^3\to\mathsf{R}^3$ tale che

$$f\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\\0\end{bmatrix},\quad f\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\4\\4\end{bmatrix},\quad f\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\\-4\end{bmatrix}$$

Il teorema di determinazione di un omomorfismo garantisce la proprietà se i tre vettori $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$ sono una base; e infatti è $\det\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&2\\0&1&0\end{bmatrix}=-2\neq 0$.

Esempio 2: Si consideri l'applicazione lineare f:R^3→R^3 così definita: $f\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-ky \\ kx-y-4z \\ (k-1)z \end{bmatrix}$. Determinare gli eventuali valori di k per i quali $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in f$ (R^3).

Il vettore dato appartiene all'immagine se è combinazione lineare dei vettori della base dell'immagine. Un sistema di generatori dell'immagine è dato dai trasformati dei vettori della base canonica del dominio, e quindi da: $\begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -k \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k-1 \end{bmatrix}$ che sono indipendenti se $\det\begin{bmatrix} 1 & -k & 0 \\ k & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix} = (k-1)^2(k+1) = 0$, quindi per $k \neq 1$ e per $k \neq -1$ l'immagine è tutto il codominio e il vettore dato sicuramente appartiene.

Per k = 1 la dimensione dell'immagine è 1, una base è $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e quindi il vettore dato, che non è suo multiplo, non appartiene all'immagine.

Per k = −1 la dimensione dell'immagine è 2, una base è $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Risulta $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$, quindi in questo caso il vettore appartiene all'immagine.

Esempio 3: Si consideri l'omomorfismo f: R^3→ R^3 individuato da $f\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ c-b \\ a-c+2b \end{bmatrix}$. Si determini una base dell'immagine I. Si determini il valore di h per cui il vettore **w** = $\begin{bmatrix} 3 \\ h \\ 1 \end{bmatrix}$ appartiene all'immagine I e si determinino le sue componenti nella base indicata per l'immagine I.

Un sistema di generatori dell'immagine si ottiene trasformando la base canonica del dominio, quindi è dato dai tre vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. I tre vettori sono dipendenti (il terzo è la differenza dei primi due, ma si può vedere anche calcolando il determinante della matrice ottenuta accostandoli), ma i primi due sono una base di I. **w** ∈ I se risulta det $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & h \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ = 1(−1−2h)+1(3) =0, quindi per h = 1, quindi il vettore $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ∈ I. Poiché le componenti di un vettore in una base sono i coefficienti con cui il vettore si scrive come combinazione lineare dei vettori della base, dobbiamo determinare a e b tali che sia

$$\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\-b=1\\a+2b=1\end{cases}$$ e quindi $a = 3$ e $b = -1$.

Omomorfismi e matrici

Siano V e W due spazi vettoriali su uno stesso campo $\boldsymbol{K}$ di dimensioni n ed m rispettivamente.

Sia $B_V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ base di V e $B_W=\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_m\}$ base di W.

I vettori $f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), ..., f(\mathbf{v}_n)$ che individuano un omomorfismo f sono vettori di W, quindi si possono esprimere nella base B_W, e si avrà:

$f(\mathbf{v}_1) = a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + ... + a_{m1}\mathbf{w}_m$

$f(\mathbf{v}_2) = a_{12}\mathbf{w}_1 + a_{22}\mathbf{w}_2 + ... + a_{m2}\mathbf{w}_m$

....

$f(\mathbf{v}_n) = a_{1n}\mathbf{w}_1 + a_{2n}\mathbf{w}_2 + ... + a_{mn}\mathbf{w}_m$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$$

Le componenti del vettore trasformato di $\mathbf{v}$ si ottengono moltiplicando la matrice della trasformazione per la colonna delle componenti di $\mathbf{v}$.

Esempio 1: Si consideri l'omomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $f\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a+3b\\b-a+2c\\a+4b+2c\end{bmatrix}$.

Determinare la matrice $\mathbf{A}$ associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$

Risulta: $f\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}, f\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix}, f\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix}$ ma è $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&3&0\\-1&1&2\\1&4&2\end{bmatrix}$

Esempio 2: Si consideri l'omomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $f\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+2b\\2a+b+c\\3b-c\end{bmatrix}$.

a) Scrivere la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica.
b) Determinare la dimensione e una base per il nucleo e l'immagine.
c) Mostrare che esistono altri omomorfismi $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ distinti da f ma che abbiano lo stesso nucleo e la stessa immagine di f, indicandone la matrice rappresentativa.

a) $f\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, f\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}, f\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&2&0\\2&1&1\\0&3&-1\end{bmatrix}$

b) $f\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+2b\\2a+b+c\\3b-c\end{bmatrix}=\mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases}a+2b=0\\2a+b+c=0\\3b-c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-2b\\-4b+b+3b\equiv 0\\c=3b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-2b\\c=3b\end{cases} \Rightarrow$ una base di N è $\begin{bmatrix}-2\\1\\3\end{bmatrix}$ ⇨ il nucleo N ha dimensione 1 ⇨ dim (I)=2 base $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$ chiamiamoli **u** e **v** .

c) Per f risulta $f(\mathbf{i})=\mathbf{u}$; $f(\mathbf{j})=\mathbf{v}$; $f(-2\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k})=\mathbf{0}$ possiamo per esempio definire g nel modo seguente: $g(\mathbf{j})=\mathbf{u}$, $g(\mathbf{k})=\mathbf{v}$ e $g(-2\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k})=\mathbf{0}$ ⇨ $-2g(\mathbf{i})+g(\mathbf{j})+3g(\mathbf{k})=\mathbf{0}$ ⇨ $2g(\mathbf{i})=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\5\\9\end{bmatrix}$

⇨ $\begin{bmatrix}7/2 & 1 & 2\\5/2 & 2 & 1\\9/2 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

Esempio 3: Si consideri l'omomorfismo $f:\mathsf{R}^3\to\mathsf{R}^3$ definito da $f\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\\0\end{bmatrix}$, $f\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}=\mathbf{0}$, $f\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$.

Determinare la matrice **A** associata a f rispetto alla base canonica.

Chiamati **i**, **j**, **k** i vettori base canonica, le condizioni imposte sono: $\begin{cases}f(\mathbf{i}+\mathbf{j})=3\mathbf{i}+3\mathbf{j}\\ f(\mathbf{i}+2\mathbf{j})=0\\ f(2\mathbf{j}+\mathbf{k})\mathbf{i}\end{cases}$

Ricordando che per ipotesi f è un omomorfismo, il sistema è equivalente a $\begin{cases}f(\mathbf{i})+f(\mathbf{j})=3\mathbf{i}+3\mathbf{j}\\ f(\mathbf{i})+2f(\mathbf{j})=0\\ 2f(\mathbf{j})+f(\mathbf{k})=\mathbf{i}\end{cases}$

Le incognite sono $f(\mathbf{i})$, $f(\mathbf{j})$, $f(\mathbf{k})$ le cui componenti costituiranno le colonne della matrice, quindi

$\begin{cases}f(\mathbf{j})=-3\mathbf{i}-3\mathbf{j}\\ f(\mathbf{i})=6\mathbf{i}+6\mathbf{j}\\ f(\mathbf{k})=7\mathbf{i}+6\mathbf{j}\end{cases}$ ⇨ $\begin{bmatrix}6 & -3 & 7\\6 & -3 & 6\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

Esercizi

- Sia f l'endomorfismo di $\mathsf{R}^2[x]$ così definito: $f(1-x)=x^2$, $f(x-x^2)=x+g$, $f(1+x)=m$. Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica.
- In R^4 si considerino i quattro vettori $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}1\\3\\0\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\2\end{bmatrix}$, $\mathbf{w}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{z}=\begin{bmatrix}2\\0\\1\\0\end{bmatrix}$

a) Determinare la matrice, rispetto alla base canonica sia per il dominio che per il codominio, dell'applicazione lineare f: $\mathsf{R}^4\to\mathsf{R}^4$ tale che **v** sia autovettore relativo all'autovalore 2, **w** sia autovettore relativo all'autovalore 1, **u** e **z** appartengano al nucleo N.

b) Determinare la dimensione e una base dell'immagine I.

c) Determinare la dimensione e una base di N∩I.

- Si consideri l'omomorfismo f: $M_{2\times2}[R] \rightarrow R^3$ definito da $f\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c+2d \\ 2a-b+d \\ b+2c+3d \end{bmatrix}$.
  a) Determinare la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche
  b) Determinare la dimensione e una base del nucleo N e dell'immagine I di f.
  c) Posto $S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in R^3 : x+2y-z=0 \right\}$ determinare una base per $S \cap I$

Sistemi lineari

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite può essere scritto nella forma **Ax = b**, e la matrice **A** dei coefficienti può essere pensata come la matrice di un omomorfismo $f: K^n \rightarrow K^m$ rispetto alle basi canoniche dei due spazi.
La ricerca di soluzioni è quindi la ricerca delle eventuali antiimmagini del vettore **b**.
Se **b=0** il sistema si dice *omogeneo* e ammette sempre soluzione: almeno la soluzione **0**.
Si consideri l'insieme S delle soluzioni del sistema lineare **Ax**=**b**.

- se $\mathbf{b} \notin f(K^n)$ risulta S=∅, cioè il sistema non ammette soluzioni.
- se $\mathbf{b} \in f(K^n)$ e se **b=0** S=Ker f, quindi è **sottospazio** di K^n e risulta dimS $= n - \dim[f(K^n)] = n -$ rk**A**
- se $\mathbf{b} \in f(K^n)$ e se $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ S non è sottospazio di K^n (infatti non contiene **0**, o ad es. **A**(2**v**)=2**Av**=2**b**≠**b** se **b**≠**0**), ma S=$\{\mathbf{x} \in K^n : \mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{n}$, con $\mathbf{Av}=\mathbf{b}$ e $\mathbf{An}=\mathbf{0}\}$, cioè la generica soluzione è somma di una soluzione **v** e di un elemento variabile **n** del nucleo.(laterale del nucleo).Questo implica che determinata una soluzione del sistema, ogni altra soluzione si ottiene da questa sommando un vettore del nucleo.

Teorema di Rouché-Capelli: Condizione necessaria e sufficiente perché il sistema lineare **Ax**=**b** ammetta soluzione è che sia rk**A** = rk[**A**|**b**]

Teorema di Cramer: Un sistema lineare **Ax**=**b** di n equazioni in n incognite, con det**A**≠0 ammette una e una sola soluzione.

- Se **A** è una matrice quadrata e risulta detA≠0 l'omomorfismo f è un isomorfismo, quindi biunivoco (esiste una e una sola soluzione)
- Se **A** è una matrice quadrata e se risulta detA=0, bisogna usare il teorema di Rouché–Capelli per stabilire l'esistenza di soluzioni; se esistono, sono infinite.

Sia **A** di tipo $m\times n$ e sia rk**A**=h.

- se $m < n$
  - l'applicazione non può essere iniettiva, poiché il dominio ha dimensione maggiore del codominio, quindi se esiste soluzione non è unica,
  - se $h = m$ (cioè se il rango è massimo) l'applicazione è suriettiva e quindi esistono certamente soluzioni.
  - Le soluzioni, se esistono, sono ∞^{n-h} (in altre parole dipendono da $n-h$ parametri)
- se $m > n$
  - l'applicazione non può essere suriettiva, perché il dominio ha dimensione minore del codominio.
  - Se $h = n$ (vale a dire se il rango è massimo) l'applicazione è iniettiva e quindi se esiste una soluzione, essa è unica.

Esempio 1: Stabilire se il seguente sistema lineare $\begin{cases} 4x-6y+5z=1 \\ 6x-12y+5z=5 \\ -2x+6y=1 \end{cases}$ ammette soluzione.

Risulta $\det\begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 6 & -12 & 5 \\ -2 & 6 & 0 \end{bmatrix}=0$, ma $\det\begin{bmatrix} 4 & -6 & 1 \\ 6 & -12 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}=-60$, quindi non sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Rouché–Capelli per cui il sistema non ammette soluzioni.

Esempio 2: Si consideri l'omomorfismo f : $\mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ individuato da $f\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2a+3b \\ c-b \\ 2a+b+2c \end{bmatrix}$

a. Individuare la dimensione e una base per il nucleo N e per l'immagine I di tale omomorfismo.

b. Si consideri il vettore $\mathbf{v}=\begin{bmatrix} m \\ 3 \\ m \end{bmatrix}$ nel dominio di f e si determini $f(\mathbf{v})$. **Senza** fare conti, si indichi un secondo vettore che abbia la stessa immagine.

Risulta: $f\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $f\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix}$, $f\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, quindi $\mathbf{F}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & +1 & 2 \end{bmatrix}$

Sostituito ad m il proprio valore, ci sono due metodi di risolvere la prima parte del quesito: si moltiplica la matrice **F** per il vettore **v** oppure si sostituiscono, nella formula che dà il trasformato del generico vettore, a = m , b = 3, c = m. Supponiamo sia m =4. In ogni caso si ottiene il vettore $f(\mathbf{v})=\begin{bmatrix} 17 \\ 1 \\ 19 \end{bmatrix}$.

La seconda parte del quesito chiede, in sostanza, le antiimagini del vettore $f(\mathbf{v})$. La teoria dei sistemi lineari dice che le antiimagini di un vettore dell'immagine sono un laterale del nucleo, di rappresentante una generica soluzione, che nel nostro caso è palesemente **v**. Dunque tutti i vettori richiesti sono del tipo **v** + k **n** (ove **n** è la base del nucleo e basta fissare un valore di k per avere una soluzione al problema). Per determinare **n** bisogna risolvere il sistema $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ -y+z=0 \\ 2x+y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{3}{2}y \\ z=y \\ -3y+y+2y=0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{n}=\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Autovalori e autovettori

Considerato uno spazio vettoriale V ed un omomorfismo f di V in sé, (endomorfismo) un vettore **non nullo** $\mathbf{x}\in V$ per cui risulti $f(\mathbf{x})=h\mathbf{x}$ viene detto **autovettore** per f e lo scalare h è detto **autovalore** relativo all'autovettore **x**.

Una matrice si dice **diagonalizzabile** se è simile a una matrice diagonale (e due matrici sono simili se rappresentano lo stesso endomorfismo, espresso in basi diverse)

Le proprietà che è necessario ricordare sono:

- Se **x** è autovettore relativo all'autovalore h, ogni multiplo k**x** di **x** è autovettore relativo a h.
- Se **x** e **y** sono autovettori relativi ad uno stesso autovalore h, anche le loro combinazioni lineari a**x**+b**y** lo sono.
- Autovettori relativi ad autovalori distinti sono indipendenti.
- **Condizione sufficiente** per la **diagonalizzabilità** di una matrice di ordine n e che ammetta n autovalori distinti per l'endomorfismo f,

Per il calcolo di autovalori e autovettori: sia **A** la matrice associata ad f rispetto a una base.
Gli autovalori sono le soluzioni della **equazione caratteristica** $\det(\mathbf{A} - h\mathbf{I})=0$; se h_1 è autovalore, gli autovettori corrispondenti sono le soluzioni del sistema $(\mathbf{A} - h_1\mathbf{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

- L'equazione caratteristica è di grado n (se $\dim V=n$) nella indeterminata h e:
  - $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \mathrm{tr}\mathbf{A}$ (**traccia** di **A**) ⇨ somma autovalori
  - $\det\mathbf{A}$ ⇨ prodotto autovalori
- Se $\det(\mathbf{A} - h\mathbf{I}) = (h-a)^r(h-b)^s \ldots (h-z)^t f(h)$, si dice che l'autovalore a ha **molteplicità algebrica** r, b ha molteplicità algebrica s ecc; la molteplicità algebrica di un autovalore h_1 è indicata con $m_a(h_1)$
- Si dice invece che l'autovalore a ha **molteplicità geometrica** k se l'autospazio relativo ad a ha dimensione k ecc. La molteplicità geometrica di un autovalore h_1 è indicata con $m_g(h_1)$.
- Se per un autovalore h risulta $m_g(h) = m_a(h)$, l'autovalore si dice **regolare**.
- La molteplicità geometrica di un autovalore **non supera** la sua molteplicità algebrica. $m_g(h) \leq m_a(h)$. Quindi gli autovalori semplici (m_a=1) sono sempre regolari, perché la molteplicità algebrica è 1 come pure la geometrica
- Poiché gli autovettori relativi all'autovalore a sono i vettori le cui componenti **x** soddisfano il sistema $(\mathbf{A}-a\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$, l'autospazio relativo ad a è il nucleo dell'omomorfismo associato alla matrice $(\mathbf{A}-a\mathbf{I})$, quindi risulta $m_g(a) = n - \mathrm{rk}(\mathbf{A} - a\mathbf{I})$.

Vale il Teorema: Sia **A** una matrice quadrata di ordine n. **A** è diagonalizzabile se:
  - la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di **A** è n
  - gli autovalori di **A** sono tutti regolari.

Esempio 1: Individuare autovalori e autovettori della matrice $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Risulta $\det(\mathbf{A} - h\mathbf{I}) = h\,(h-3)(h+1)$, quindi gli autovalori sono 0, 3, – 1. Gli autovettori corrispondenti sono le soluzioni dei tre sistemi $\mathbf{Av}=\mathbf{0}$ (per h=0) cioè $\begin{cases} 3x + y + 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ ⇨ $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$

(per h=3) cioè $\begin{cases} y + 2z = 0 \\ -3y = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ ⇨ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $(\mathbf{A}+\mathbf{I})\mathbf{v}=\mathbf{0}$ (per h=–1) cioè $\begin{cases} 4x + y + 2z = 0 \\ y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ⇨ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

Esempio 2: Stabilire per quali valori di k è diagonalizzabile la matrice $\mathbf{A}_k=\begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 2k & 0 \\ 0 & 3 & k \end{bmatrix}$.

Gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione caratteristica $\det(\mathbf{A}_k - h\mathbf{I}) = \det\begin{bmatrix} 1-h & k & 0 \\ 0 & 2k-h & 0 \\ 0 & 3 & k-h \end{bmatrix} = 0$,

cioè $(1-h)(2k-h)(k-h)=0$, ⇨ $h_1=1$, $h_2=2k$ e $h_3=k$.

Gli autovalori non sono distinti per $h_1= h_2$ ⇨ $k = \frac{1}{2}$, $h_1= h_3$ ⇨ $k=1$ e $h_2= h_3$ ⇨ $k=0$. Per ogni altro k la matrice ha 3 autovalori distinti e quindi è diagonalizzabile.

Studiamo i tre casi. (in tutti e tre i casi interessa studiare la molteplicità geometrica dell'autovalore doppio, visto che quello semplice è sicuramente regolare)

$k = \frac{1}{2}$ ⇨ $h_1= h_2=1$, $h_3=\frac{1}{2}$. $m_a(1)=2$; $rk(\mathbf{A}_{\frac{1}{2}} - \mathbf{I}) = rk\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = 2$ ⇨ $m_g(1)=3-2=1$ quindi l'autovalore non è regolare.

$k=1$ ⇨ $h_1= h_3=1$, $h_2= 2$. $m_a(1)=2$; $rk(\mathbf{A}_1 - \mathbf{I}) = rk\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = 1$ ⇨ $m_g(1)=3-1=2$ quindi l'autovalore è regolare.

$k=0$ ⇨ $h_2= h_3=0$, $h_1=1$. $m_a(0)=2$; $rk(\mathbf{A}_0) = rk\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = 2$ ⇨ $m_g(0)=3-2=1$ quindi l'autovalore non è regolare..

Concludendo, la matrice è diagonalizzabile per tutti i valori di k, tranne 0 e $\frac{1}{2}$

Esempio 3: Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ così definito: $f\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $f\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$, $f\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Senza svolgere nessun conto, determinare la dimensione e una base per nucleo e immagine di f e determinare autovalori e autovettori per f.

I tre vettori $\mathbf{u}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ sono una base del dominio, quindi vale il teorema di determinazione di un omomorfismo. Risulta $f(\mathbf{u}) = 2\,\mathbf{u}$, $f(\mathbf{v}) = -2\,\mathbf{v}$, $f(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$, quindi $f(\mathbf{u})$ e $f(\mathbf{v})$ sono base per l'immagine, che quindi ha dimensione 2, quindi il nucleo ha dimensione 1 e $\mathbf{w}$ è base del nucleo.

Le relazioni viste dicono anche che i tre autovalori (distinti) sono 2, –2 e 0, cui corrispondono rispettivamente gli autovettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.

Esempio 4: Dopo aver dato la definizione di autovalore e autovettore per un endomorfismo f, dimostrare, utilizzando tale definizione, che se $\mathbf{w}$ è autovettore per f relativo all'autovalore h, $\mathbf{w}$ è anche autovettore per f^2 (l'endomorfismo ottenuto applicando f successivamente due volte), ma relativo all'autovalore h^2.

Un vettore non nullo $\mathbf{w}$ è autovettore per f relativo all'autovalore h se è $f(\mathbf{w}) = h\,\mathbf{w}$.

Ma allora $f(f(\mathbf{w})) = f(h\,\mathbf{w}) = h\,f(\mathbf{w}) = h \cdot h\,\mathbf{w} = h^2\,\mathbf{w}$ e quindi $\mathbf{w}$ è autovettore per f^2 relativo all'autovalore h^2.

Esercizi

- Sia f l'endomorfismo di R^3 definito dalla matrice $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ k-1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$. Per quali valori di k è diagonalizzabile ?
- Sia $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k+1 & k & 0 \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & g \end{bmatrix}$. Per quali valori di k è diagonalizzabile ?
- Sia $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ k & 1 & 2k \\ 0 & 0 & g \end{bmatrix}$. Per quali valori di k è diagonalizzabile ?
- Stabilire per quali valori di k è diagonalizzabile la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
- Sia $f : \mathrm{R}^3 \rightarrow \mathrm{R}^3$ l'omomorfismo individuato dalle condizioni:

$$f\begin{bmatrix} m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+1 \\ 4 \\ g \end{bmatrix}, \quad f\begin{bmatrix} m+1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ g \end{bmatrix},$$

a) Determinare la matrice associata nelle basi canoniche.
b) Stabilire per quali valori di k la matrice associata è diagonalizzabile

Esercizi di ricapitolazione

1. Si consideri l'omomorfismo f: $\mathrm{R}^4 \rightarrow \mathrm{R}^3$ definito da

$$f\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b+2c \\ a+c+d \\ b+c-d \end{bmatrix}$$

a) Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica
b) Determinare la dimensione e una base del nucleo N e dell'immagine I di f.
c) Sia R il sottospazio generato dai vettori $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Determinare la dimensione e una base di $\mathrm{R} \cap \mathrm{N}$.

2. Si consideri l'omomorfismo f: $\mathrm{R}^3 \rightarrow \mathrm{R}^3$ definito da $f\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b-3c \\ 2a-b \\ a-c \end{bmatrix}$.

a) Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica
b) Determinare la dimensione e una base del nucleo N e dell'immagine I di f.

c) Posto $S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathsf{R}^3 : x - y + 2z = 0 \right\}$ determinare una base per $S \cap I$

d) Stabilire se la matrice di f è diagonalizzabile.

3. Si consideri l'omomorfismo f: $\mathsf{R}^2[x] \to \mathsf{R}^2[x]$ definito da

$$f(ax^2 + bx + c) = (a+2b)x^2 + (b+2a-c)x + a - b - c.$$

a) Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica
b) Determinare la dimensione e una base del nucleo N e dell'immagine I di f.
c) Determinare autovalori e autovettori per f e stabilire se la matrice di f è diagonalizzabile.

4. In R^3 si considerino i quattro vettori $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

a) Stabilire per quali eventuali valori di k i tre vettori **v**, **u**, **w** costituiscono una base per R^3.

b) Determinare, in funzione di k, la matrice **A**, rispetto alla base canonica, dell'applicazione lineare f: $\mathsf{R}^3 \to \mathsf{R}^3$ tale che i trasformati dei vettori della base canonica siano rispettivamente **v**, **u**, **w**.

c) Determinare, in funzione di k, la dimensione e una base dell'immagine I, del nucleo N e di $N \cap I$.

d) Stabilire, in funzione di k, se **z** appartiene ad I.

e) Per $k = 1$ determinare autovalori e autovettori di **A.**

5. Si dimostri che esiste un e un solo omomorfismo f : $\mathsf{R}^3 \to \mathsf{R}^3$ tale che

$$f\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad f\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

a) Determinare la matrice associata ad f nella base canonica (sia per il dominio che per il codominio).
b) Determinare la dimensione e una base per il nucleo e per l'immagine di f.
c) Determinare autovalori e autovettori di f (si consiglia di *guardare* f e di usare i punti precedenti)