

**Compito Scritto dell'Esame di Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica,
Dipartimento di Informatica Università degli Studi di Milano, Sede di Crema - 4.10.2013**

Il tempo riservato alla prova scritta è di 2 ore. Durante la prova è possibile consultare libri e appunti.

Se lo scritto è in 2 parti, svolgere parti distinte su fogli distinti. Ogni foglio deve riportare il numero di matricola.

In ogni esercizio occorre indicare chiaramente, per ogni risposta, il numero della domanda corrispondente

Nota Bene - Riportare lo svolgimento degli esercizi per esteso (quando l'esercizio richiede più passaggi di calcolo, non sarà preso in considerazione se riporta solo le soluzioni). Se una serie di calcoli coinvolge una o più frazioni semplici (numeratore e denominatore interi), per chiarezza, si conducano i calcoli mantenendo tali numeri in forma frazionaria fin dove possibile (non li si converta nelle loro approssimazioni con virgola e decimali: solo il risultato finale sarà eventualmente rappresentato in quest'ultima forma).

PARTE PRIMA (MODULO 1)

Esercizio A - Vicini troppo vicini (Legge della somma)

Nella mia nuova sede di lavoro gli uffici sono collocati secondo un reticolo regolare **cubico 4x4x4** (costituito da **64** celle). Non vorrei mai avere il signor H come vicino, (perché al telefono sbraita) ma purtroppo anche il signor H lavorerà nella stessa sede.

Se gli uffici sono assegnati per sorteggio

1. qual è la probabilità che io me lo ritrovi come vicino? (*parete o soffitto/pavimento in comune*)

(vi sono 4 tipi di celle per la struttura cubica: A - celle nei vertici, B - sugli spigoli ma non nei vertici, C - sulle facce ma non in A né in B, e infine Z - nella zona interna)

2. qual è il valore di tale probabilità se il reticolo cubico ha dimensioni $L \times L \times L$, con $L > 2$?

Esercizio B - Dadi truccati (Normalizzazione, Probabilità condizionata, Unione di eventi)

Un dado a quattro facce è truccato in modo che la probabilità di un dato numero sia proporzionale all'inverso del quadrato del numero stesso: es. il **3** è **9** volte meno probabile dell'**1** ($P(3)=P(1)/3^2$)

Se si lancia il dado una volta, si dica

1) qual è a priori il valore della probabilità di ottenere un numero pari

2) se mi dicono che è uscito un numero pari qual è la probabilità che sia un **4**

3) se mi dicono che è uscito un numero minore di **3**, qual è la probabilità che sia pari

Esercizio C - Scommessa equa - (Valore atteso)

Per partecipare ad un gioco occorre versare un costo $c=5$ che non sarà restituito né in caso di perdita né in caso di vincita. Se si vince si riceve un premio $b=100$.

La probabilità p di vincere non ci viene comunicata direttamente, ma ci viene detto che il valore atteso è pari a **15**.

1) Qual è il valore della probabilità p ?

Esercizio D - Telefono senza fili (Canali di comunicazione in sequenza - Teorema di Bayes)

Un'urna contiene **2** palline **Rosse** e **1** pallina **Verde**.

- Qualcuno estrae una pallina.

- Alice osserva la pallina poi dice il colore a Bob,

- Bob ascolta Alice e riferisce a Charlie

- Charlie mi riferisce che il colore è **Rosso**. (Evento **E**).

Io so che Alice dice la verità con probabilità $a=1/2$, che Bob riferisce correttamente con probabilità $b=2/3$ e che Charlie riferisce correttamente con probabilità $c=3/4$.

1) Qual è la probabilità che il colore della pallina fosse davvero **Rosso**?

2) Qual è, a posteriori, la probabilità che Alice abbia detto la verità a Bob?

(Suggerimento: si disegni l'albero delle possibilità: fino all'ultimo passaggio si eviti di semplificare le frazioni)

PARTE SECONDA (MODULO 2 e MODULO 3)

Esercizio E - Quattro componenti (Densità Esponenziale, Serie, Parallelo e Stand-by)

Quattro componenti identici e indipendenti hanno una vita regolata dalla densità di prob. di fallimento $f(t) = 3\exp(-ct)$ nell'intervallo $[0, +\infty)$ e nulla altrove.

1. Determinare c .

Considerare il sistema costituito dal parallelo dei 4 componenti. Calcolare

2. la funzione fallibilità $F_{\text{PARALLELO}}(t)$ per tale sistema
3. la vita mediana $t_{\text{MEDIANA-PARALLELO}}$ per tale sistema
4. la densità di probabilità di fallimento per tale sistema

Considerare il sistema costituito dalla serie dei 4 componenti. Calcolare

5. la funzione fallibilità $F_{\text{SERIE}}(t)$ per tale sistema
6. la moda $t_{\text{MODA-SERIE}}$ del tempo di vita per tale sistema
7. la vita mediana $t_{\text{MEDIANA-SERIE}}$ per tale sistema

Esercizio F - Due variabili aleatorie (Somma di variabili aleatorie, Funzioni generatrici)

Una data distribuzione di una variabile aleatoria i è non nulla solo sui valori interi $\{1, 2\}$ ed è caratterizzata da $P(1)/P(2) = 3/4$

1. Quanto valgono $P(1)$ e $P(2)$?
2. Quali sono la sua media, il suo momento secondo e la sua varianza?
Se faccio la somma di $n=3$ di tali variabili ottengo una variabile che chiamo k
3. Qual è la distribuzione della variabile somma k ?
4. Quali sono la sua media, la sua varianza e il suo momento secondo?

Esercizio G - Ricerca Bachi (Geometrica, Binomiale, Poissoniana)

In un codice di 5000 istruzioni (corrispondenti ad altrettante righe di codice) sono stati inseriti accidentalmente 50 bachi. Assumiamo per semplicità che ciascuno possa essere scoperto esaminando una specifica riga di codice. Un tester si appresta a verificare individualmente un sotto-insieme di righe scelte a caso.

0) Se esegue una singola verifica (una verifica corrisponde al controllo di correttezza di una singola riga di codice) qual è la probabilità p che trovi un baco?

- 1) Quante verifiche deve effettuare in media prima di rilevare il primo baco?
- 2) Se esegue $n=4$ verifiche qual è la probabilità che trovi almeno due bachi?
- 3) Se $n=100$ verifiche qual è la probabilità che queste trovino rispettivamente 0, 1, 2 bachi?

(Nota - Si può assumere che una riga possa essere verificata ripetutamente: quando si sceglie la successiva riga da controllare non si mettono in disparte le righe già verificate; questa assunzione garantisce la mutua indipendenza delle singole verifiche)

Esercizio H - 1000 Lampioni (Binomiale, limiti Poissoniano e Gaussiano)

Nel comune di Padova sono presenti 5000 lampioni, di cui 1000 nel centro storico e 4000 fuori dal centro storico, cioè in periferia. Ciascun lampione è provvisto di una lampadina che ha una probabilità $p=1/1000$ di fulminarsi durante una notte. Supponiamo che tale probabilità sia indipendente dallo stato di usura della lampadina e inoltre che ogni mattina avvenga la sostituzione di tutte le lampadine che si sono fulminate durante la notte.

1. Qual è la probabilità che durante la notte non si fulmini nessuna lampadina?
2. Qual è la probabilità che durante la notte non si fulmini alcuna lampadina del centro storico e se ne fulmini esattamente una della periferia?
3. Sapendo che durante la notte si è fulminata una sola lampadina, qual è la probabilità che sia una lampadina del centro storico?
4. Quali sono il numero medio e la varianza del numero di lampadine fulminate in un anno bisestile?