

Il tempo riservato alla prova scritta è di 2 ore e 30 minuti. Durante la prova è possibile consultare libri e appunti. Se lo scritto è in 2 parti, svolgere parti distinte su fogli distinti. Ogni foglio deve riportare il numero di matricola.

In ogni esercizio occorre indicare chiaramente, per ogni risposta, il numero della domanda corrispondente

Nota Bene - Riportare lo svolgimento degli esercizi per esteso (quando l'esercizio richiede più passaggi di calcolo, non sarà preso in considerazione se riporta solo le soluzioni). Se una serie di calcoli coinvolge una o più frazioni semplici (numeratore e denominatore interi), per chiarezza, si conducano i calcoli mantenendo tali numeri in forma frazionaria fin dove possibile (non li si converta nelle loro approssimazioni con virgola e decimali: solo il risultato finale sarà eventualmente rappresentato in quest'ultima forma).

PARTE SECONDA

Esercizio F - Tre componenti (Serie, Parallelo e Stand-by)

Tre componenti identici e indipendenti hanno una vita regolata dalla densità di probabilità di fallimento $f(t) = -at+2$ nell'intervallo $[0,1]$ e nulla altrove.

1. Trovare il valore numerico di a .

Calcolare per il singolo componente

2. la funzione di fallibilità $F(t)$ e la funzione di sopravvivenza $S(t)$

3. la vita media $\langle t \rangle$

4. la moda t_{MODA} del tempo di vita

5. la vita mediana t_{MEDIANA}

Considerare il sistema costituito dai **3** componenti posti in stand-by. Calcolare

6. la vita media $\langle t \rangle_{\text{STAND-BY}}$ di tale sistema

7. la varianza della vita di tale sistema

Considerare il sistema costituito dal parallelo dei **3** componenti. Calcolare

8. la funzione fallibilità $F_{\text{PARALLELO}}(t)$ per tale sistema

9. la vita mediana $t_{\text{MEDIANA-PARALLELO}}$ per tale sistema

10. la densità di probabilità di fallimento per tale sistema

Considerare il sistema costituito dalla serie dei **3** componenti. Calcolare

11. la funzione fallibilità $F_{\text{SERIE}}(t)$ per tale sistema

12. la densità di probabilità di fallimento per tale sistema

13. la vita media $\langle t \rangle_{\text{SERIE}}$ per tale sistema

14. la moda $t_{\text{MODA-SERIE}}$ del tempo di vita per tale sistema

15. la vita mediana $t_{\text{MEDIANA-SERIE}}$ per tale sistema

Esercizio G - Mele avvelenate (Distribuzione Ipergeometrica)

Biancaneve incontra la strega cattiva, che le porge un cesto contenente **7** mele. Esternamente queste sono indistinguibili, ma **4** di queste sono avvelenate, mentre le altre **3** contengono un antidoto per il veleno. Se si mangia **1** mela avvelenata e **1** mela con l'antidoto non si hanno conseguenze particolari (a parte la sazietà).

Il veleno però, se non compensato dall'antidoto, fa cadere in catalessi.

La strega propone a Biancaneve di pescare **3** mele e di mangiarle.

1) Se Biancaneve lo fa qual è la probabilità che non cada in catalessi?

Esercizio H - Mele avvelenate (Limite Binomiale dell'ipergeometrica)

La strega cattiva passa con un camion il cui enorme rimorchio è pieno di mele, metà avvelenate e metà con antidoto (v. problema precedente): i frutti sono ben mescolati. Nota: siccome le mele sono tante, pescando un frutto non si alterano percettibilmente le percentuali.

1) Se Biancaneve pesca **5** mele (e le mangia tutte) qual è la probabilità che non cada in catalessi?

Esercizio I - Due variabili aleatorie (Somma di variabili aleatorie, Funzioni generatrici)

Una data distribuzione di una variabile aleatoria i è non nulla solo sui valori interi $\{5,7\}$ ed è caratterizzata da $P(5)/P(7) = 3/4$

1. Quanto valgono $P(5)$ e $P(7)$?
2. Quali sono la sua media, il suo momento secondo e la sua varianza?
Se faccio la somma di $n=3$ di tali variabili ottengo una variabile che chiamo k
3. Qual è la distribuzione della variabile somma k ?
4. Quali sono la sua media, la sua varianza e il suo momento secondo?

Esercizio J - Cacciatori di yak (processi di Poisson, limite normale)

Le statistiche dicono che nel Kamchatka ogni anno solare durante la stagione della caccia all'orso risultano vittime di cacciatori, in media, 4 yak (bovini tipici della regione).

Se numero di yak scambiati per orsi segue una legge di Poisson

1. Qual è la probabilità che il numero di vittime bovine sia maggiore di 3?
2. Qual è la probabilità d'avere un'annata senza vittime bovine?
3. Se la stagione della caccia dura 8 mesi qual è l'intensità λ del fenomeno in yak per mese
4. Quanto tempo (in mesi) passa in media tra un incidente e l'altro

(adottando le opportune ipotesi sulla distribuzione nel tempo delle stagioni di caccia)

Per ciascun capo erroneamente abbattuto la regione autonoma del Kamchatka rifonde i proprietari con un rublo d'argento (recante l'effigie dell'animale).

Assumendo che l'intensità del fenomeno non cambi nel tempo (e adottate le opportune ipotesi di indipendenza)

5. Quanti rubli deve versare in media la regione in cento anni solari,
6. Qual è la varianza della distribuzione di probabilità corrispondente
7. Qual è l'intervallo di conteggio centrale corrispondente al 95% della probabilità?