

Il tempo riservato alla prova scritta è di 2 ore e 30 minuti. Durante la prova è possibile consultare libri e appunti. Se lo scritto è in 2 parti, svolgere parti distinte su fogli distinti. Ogni foglio deve riportare il numero di matricola.

**In ogni esercizio occorre indicare chiaramente, per ogni risposta, il numero della domanda corrispondente**

Nota Bene - Riportare lo svolgimento degli esercizi per esteso (quando l'esercizio richiede più passaggi di calcolo, non sarà preso in considerazione se riporta solo le soluzioni). Se una serie di calcoli coinvolge una o più frazioni semplici (numeratore e denominatore interi), per chiarezza, si conducano i calcoli **mantenendo tali numeri in forma frazionaria** fin dove possibile (non li si converta nelle loro approssimazioni con virgola e decimali: solo il risultato finale sarà eventualmente rappresentato in quest'ultima forma).

## PARTE PRIMA

### Esercizio A - Normalizzazione, definizioni

La funzione  $f(x) = x^3$  definita nell'intervallo reale  $[0, 2b]$  con  $b > 0$ , rappresenta una densità di probabilità. 1) Trovare il valore numerico di  $b$ .

- 2) Trovare il momento secondo di  $f(x)$
- 3) Trovare la varianza  $f(x)$

### Esercizio B - Piranha (Teorema di Bayes)

In un acquario opaco ci sono due pesci. Ciascuno può essere con la stessa probabilità un pesce-gatto (G) o un cucciolo di pescecane (C). (Qual è a priori la probabilità che si tratti di due pescecani? o che il numero dei pesci-gatto e dei pescecani sia uguale?). Ora metto nell'acquario un pesce-gatto (G). Dopo qualche minuto pesco a caso un pesce e noto che è un pescecane (C).

- 1) Qual è la probabilità che all'inizio vi fossero due pescecani?
- 2) Qual è la probabilità che all'inizio vi fossero lo stesso numero di pescecani e pesci-gatto?

Rimetto il pescecane nell'acquario. Ripesco un pesce: è un pesce-gatto (G).

- 3) Qual è la probabilità che all'inizio vi fossero due pescecani?

(Suggerimento: la *posterior* del caso analogo visto in precedenza può essere usata come *prior*)

### Esercizio C - Impronte digitali (Legge del prodotto, problemi di collisione)

Gli individui della specie dei microdattili sono caratterizzati da impronte digitali. L'impronta si determina alla nascita in modo completamente casuale per ciascun individuo e quindi non necessariamente è univoca (due esemplari distinti possono avere la stessa impronta grazie al caso). L'informazione contenuta in un'impronta però è molto limitata e si riduce a **8 bit**.

Si consideri un campione di  $n=16$  esemplari

Sia data l'impronta digitale (10101100) che appartiene ad un esemplare A,

- 1) Se scelgo a caso un secondo esemplare B dalla popolazione, qual è la probabilità che abbia quella stessa impronta?
- 2) Qual è la probabilità che almeno un esemplare della popolazione abbia la stessa impronta dell'esemplare A.

Ora esamino un campione diverso, costituito da **7** esemplari

- 3) Qual è la probabilità che almeno due esemplari abbiano le stesse impronte digitali?

(In altri termini: qual è la probabilità che vi sia almeno un'impronta digitale comune a più individui?)

### Esercizio D - Carte (Probabilità condizionata, indipendenza tra eventi)

In un mazzo di carte vi sono **26** carte rosse (di cui **6** sono Figure), **26** carte nere (di cui **6** sono figure) e **2** Jolly. (Qual è la probabilità di pescare una carta Rossa?)

Alice pesca una carta e mi dice che è una figura.

- 1) Qual è la probabilità che si tratti di una carta Rossa?
- 2) Gli eventi carta Rossa e Figura sono indipendenti? (giustificare)

### Esercizio E - Scommesse (Valore atteso, Probabilità condizionata)

Ho scommesso con un amico che il primo estratto della ruota del Lotto di Milano (che ha in totale **90** numeri, dall'1 al 90) sarà un numero minore o uguale a **9**, puntando la somma di **3** euro. Il mio amico vince tale somma se esce un numero maggiore di **9**. A sua volta egli ha puntato una somma di  $x$  euro.

- 1) Se la scommessa è equa quanto ha puntato il mio amico?

Viene effettuata l'estrazione e mi dicono che è uscito un numero dispari

- 2) Qual è ora la mia probabilità di vincere?
- 3) Qual è ora il valore atteso della scommessa dal mio punto di vista?

## PARTE SECONDA

### Esercizio F - Tre componenti (Serie, Parallelo e Stand-by)

Tre componenti identici e indipendenti hanno una vita regolata dalla densità di probabilità di fallimento  $f(t) = -at+1$  nell'intervallo  $[0,2]$  e nulla altrove, con  $a > 0$ .

- ✓1. Trovare il valore numerico di  $a$ .

Calcolare per il singolo componente

- ✓2. la funzione di fallibilità  $F(t)$  e la funzione di sopravvivenza  $S(t)$   
✓3. la vita media  $\langle t \rangle$   
✓4. la moda  $t_{MODA}$  del tempo di vita  
✓5. la vita mediana  $t_{MEDIANA}$

Considerare il sistema costituito dai 3 componenti posti in stand-by. Calcolare

- ✓6. la vita media  $\langle t \rangle_{STAND-BY}$  di tale sistema  
✓7. la varianza della vita di tale sistema

Considerare il sistema costituito dal parallelo dei 3 componenti. Calcolare

- ✓8. la funzione fallibilità  $F_{PARALLELO}(t)$  per tale sistema  
✓9. la vita mediana  $t_{MEDIANA-PARALLELO}$  per tale sistema  
✓10. la densità di probabilità di fallimento per tale sistema

Considerare il sistema costituito dalla serie dei 3 componenti. Calcolare

- ✓11. la funzione fallibilità  $F_{SERIE}(t)$  per tale sistema  
✓12. la densità di probabilità di fallimento per tale sistema  
✓13. la vita media  $\langle t \rangle_{SERIE}$  per tale sistema  
✓14. la moda  $t_{MODA-SERIE}$  del tempo di vita per tale sistema  
✓15. la vita mediana  $t_{MEDIANA-SERIE}$  per tale sistema

### Esercizio G - Cappello (Distribuzioni Ipergeometrica e Binomiale, approssimazione Gaussiana)

Ad una cena di beneficenza vengono raccolte delle donazioni in denaro depositate in un grande capello che viene fatto circolare tra i commensali.

Alla fine della raccolta il cappello contiene 15 monete da cinquanta centesimi e 5 bottoni.

Se si estraggono **senza** reintroduzione  $n=3$  oggetti dal cappello e si osserva il loro valore economico,

- ✓1. qual è la probabilità che il valore totale osservato sia maggiore o uguale ad un euro?  
(si assuma che i bottoni abbiano valore economico nullo)

Se invece si estraggono **con** reintroduzione  $n=3$  oggetti dal cappello e si osserva il loro valore

2. qual è la probabilità che il valore totale osservato sia maggiore o uguale ad un euro?

### Esercizio I - Due variabili aleatorie (Somma di variabili aleatorie, Funzioni generatrici)

Una data distribuzione di una variabile aleatoria  $i$  è non nulla solo sui valori interi  $\{2,3\}$  ed è caratterizzata da  $P(2)/P(3) = 2/3$

- ✓1. Quanto valgono  $P(2)$  e  $P(3)$ ?  
✓2. Quali sono la sua media, il suo momento secondo e la sua varianza?  
Se faccio la somma di  $n=2$  di tali variabili ottengo una variabile che chiamo  $k$   
✓3. Qual è la distribuzione della variabile somma  $k$ ?  
✓4. Quali sono la sua media, la sua varianza e il suo momento secondo?

### Esercizio J - Pesci gatto (processi di Poisson, limite normale)

Il numero dei pesci gatto osservati durante dieci minuti sotto il ponte sul Serio segue una legge di Poisson con media 5.

- ✓0) Qual è la varianza della distribuzione?  
✓1) Calcolare la probabilità di avvistare più di 3 pesci gatto tra le 14:35 e le 14:40.  
✓2) Quanto tempo passa in media tra un avvistamento e il successivo

Quanti pesci passano in media durante un turno di osservazione di 10 ore

- 3) Quali sono la varianza e la deviazione standard della distr. di probabilità corrispondente  
4) Qual è l'intervallo di conteggio centrale corrispondente al 95% della probabilità?