Compito Scritto dell'Esame di Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica,
Dipartimento di Informatica Università degli Studi di Milano, Sede di Crema - 22.07.2013

Durante la prova è possibile consultare libri e appunti.

Se lo scritto è in 2 parti, svolgere parti distinte su fogli distinti. Ogni foglio deve riportare il numero di matricola.

In ogni esercizio occorre indicare chiaramente, per ogni risposta, il numero della domanda corrispondente

Nota Bene – Riportare lo svolgimento degli esercizi per esteso (quando l'esercizio richiede più passaggi di calcolo, non sarà preso in considerazione se riporta solo le soluzioni). Se una serie di calcoli coinvolge una o più frazioni semplici (numeratore e denominatore interi), per chiarezza, si conducano i calcoli **mantenendo tali numeri in forma frazionaria** fin dove possibile (non li si converta nelle loro approssimazioni con virgola e decimali: solo il risultato finale sarà eventualmente rappresentato in quest'ultima forma).

PARTE PRIMA

Esercizio A – La donna è mobile? (Calcolo combinatorio)

Si consideri un mazzo di **3** carte (e.s. fante, donna e re di picche, per brevità J,Q,K) e si assuma, per fissare le idee, che le carte siano disposte nell'ordine J,Q,K. Se mescolo il mazzo

1) Qual è la probabilità che tutte e tre le carte rimangano al proprio posto?
2) Qual è la probabilità che nessuna rimanga al proprio posto?
3) Qual è la probabilità che esattamente una rimanga immobile (=nella posizione iniziale)?
4) Qual è la probabilità che la donna di picche (Q) rimanga immobile?

Esercizio B – Indovina la Password (Regola del prodotto, regola del Complemento)

Alice, Bob, Charlie, Danny ed Eva sono hacker. Essi vogliono accedere ad un determinato sistema tramite lo username "pippo" (effettivamente attivo per quel sistema), ma non conoscono la password corrispondente: questa consiste in una determinata parola, presa da un vocabolario di **N=10** parole, noto ai cinque. E' ammesso ammesso un massimo di $\mathbf{t_{max}=5}$ tentativi falliti per l'accesso al sistema ($\mathbf{t_{max}}$= totale del numero di tentativi successivi falliti anche se effettuati da postazioni diverse), dopodiché il sistema blocca l'utente in questione. Ci chiediamo se ai fini del semplice successo dell'impresa sia meglio che le **r=5** persone tentino l'accesso indipendentemente l'uno dall'altro, cioè senza comunicare l'uno con l'altro, o se è meglio che tentino l'accesso in sequenza (dopo aver randomizzato l'ordine di intervento) e comunicando ad alta voce, a tutti, la password usata

(ad esempio: Alice dice, e digita, "pluto", e poi comunica agli altri se è entrata nel sistema o ha fallito)

Qual è la probabilità che almeno uno di loro acceda al sistema

1) se non comunicano?
2) se comunicano secondo lo schema descritto?

Se gli hacker comunicano, allora, dopo che un hacker ha indovinato, suddivideranno equamente il valore dell'informazione nascosta nell'account (**v=100,000 €, centomila euro**) tra tutti i 5

3) qual è la speranza matematica del singolo giocatore se i cinque comunicano?

Se gli hacker non comunicano, solo chi entra nel sistema può accedere al premio, che sarà diviso equamente tra i soli che hanno avuto accesso al sistema.

4) Se gli hacker non comunicano qual è la probabilità che tutti indovinino la password?

__Esercizio C__ – **Testimoni daltonici (Canali di comunicazione ridondanti - Teorema di Bayes)**
Un'urna contiene **2** palline **Rosse** e **3** palline **Verdi**. Qualcuno estrae una pallina.
Alice osserva la pallina e mi riferisce che il colore è **Rosso**.
Bob osserva la pallina e mi riferisce che il colore è **Verde**.
Chiamiamo l'evento "Alice dice **Rosso e** Bob dice **Verde**" evento **E**,
Entrambi però sono daltonici e possono sbagliare, l'una indipendentemente dall'altro, nella valutazione del colore: Alice sbaglia con probabilità $\mathbf{(1-a)=1/3}$, Bob con probabilità $\mathbf{(1-b)=1/4}$.
1) Se il colore della pallina è **Rosso**, qual è la probabilità dell'evento **E**?
2) Se il colore della pallina è **Verde**, qual è la probabilità dell'evento **E**?
3) Dunque, qual è la probabilità totale dell'evento **E**?
4) Tenuto conto della composizione dell'urna e alla luce delle affermazioni dei due,
qual è la probabilità che la pallina estratta fosse **Rossa**? (**P(Rossa|E)=?**)
(Suggerimento: disegnare l'albero delle possibilità)

__Esercizio D__ – **Telefono senza fili (Canali di comunicazione in sequenza – Teorema di Bayes)**
Un'urna contiene **2** palline **Rosse** e **3** palline **Verdi**. Qualcuno estrae una pallina.
Charlie osserva la pallina poi <u>riferisce</u> il colore a Dan, il quale mi dice che il colore è **Rosso**.
(Evento **E**)- Io so che Charlie dice la verità con probabilità $\mathbf{c=1/5}$, Dan con probabilità $\mathbf{d=1/6}$.
0a) Se il vero colore della pallina è **Rosso**,
qual è la probabilità che Charlie dica **Rosso**? Quale che dica **Verde?**
0a) Se il vero colore della pallina è **Verde**,
qual è la probabilità che Charlie dica **Rosso**? Quale che dica **Verde?**
1a) Se Charlie dice **Rosso**, qual è la probabilità che Dan dica **Rosso**?
1b) Se Charlie dice **Verde**, qual è la probabilità che Dan dica **Rosso**?
2) Dunque, qual è la probabilità totale che Dan dica **Rosso**?
3) Tenuto conto della composizione dell'urna e alla luce dell'affermazione di Dan,
qual è la probabilità che la pallina fosse davvero **Rossa**?
(Suggerimento: disegnare l'albero delle possibilità)

__Esercizio E__ – **Normalizzazione di densità di probabilità**
La funzione $\mathbf{f(x) = x^4}$ definita nell'intervallo reale $\mathbf{[0,2b]}$ con $\mathbf{b>0}$, rappresenta una densità di probabilità. Trovare il valore numerico di **b**.

Compito Scritto dell'Esame di Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica,
Dipartimento di Informatica Università degli Studi di Milano, Sede di Crema - 22.07.2013

Durante la prova è possibile consultare libri e appunti.

Se lo scritto è in 2 parti, svolgere parti distinte su fogli distinti. Ogni foglio deve riportare il numero di matricola.

In ogni esercizio occorre indicare chiaramente, per ogni risposta, il numero della domanda corrispondente

Nota Bene – Riportare lo svolgimento degli esercizi per esteso (quando l'esercizio richiede più passaggi di calcolo, non sarà preso in considerazione se riporta solo le soluzioni). Se una serie di calcoli coinvolge una o più frazioni semplici (numeratore e denominatore interi), per chiarezza, si conducano i calcoli **mantenendo tali numeri in forma frazionaria** fin dove possibile (non li si converta nelle loro approssimazioni con virgola e decimali: solo il risultato finale sarà eventualmente rappresentato in quest'ultima forma).

PARTE SECONDA

Esercizio F - Tre componenti (Serie, Parallelo e Stand-by)

Tre componenti identici e indipendenti hanno una vita regolata dalla densità di probabilità di fallimento $f(t)=ct$ nell'intervallo $[0,2b]$, con $b>0$, e nulla altrove. Il momento secondo di tale densità è pari a **3/5**.

1. Trovare il valore numerico di **b**.
2. Trovare il valore numerico di **c**. (Suggerimento: ricavare le equazioni per i due vincoli – normalizzazione e momento secondo -- e risolvere il sistema per divisione e sostituzione.)

Calcolare

3. la funzione di fallibilità $F(t)$ e la funzione di sopravvivenza $S(t)$ del singolo componente
4. la vita media $<t>$ del singolo componente
5. la moda t_{MODA} del tempo di vita del singolo componente
6. la vita mediana $t_{MEDIANA}$ del singolo componente
7. la funzione fallibilità $F_{PARALLELO}(t)$ del sistema costituito dal parallelo dei tre componenti
8. la densità di probabilità di fallimento per tale sistema
9. la vita media $<t>_{PARALLELO}$ per tale sistema
10. la moda $t_{MODA-PARALLELO}$ del tempo di vita per tale sistema
11. la vita mediana $t_{MEDIANA-PARALLELO}$ per tale sistema
12. la funzione di sopravvivenza $S_{SERIE}(t)$ del sistema dato dalla serie dei tre componenti
13. la densità di probabilità di fallimento per tale sistema
14. la vita media $<t>_{STAND-BY}$ del sistema dato dai tre componenti posti in stand-by

Esercizio G – Mele avvelenate (Distribuzione Ipergeometrica)

Biancaneve incontra la strega che le porge un cesto contenente **10** mele. Esternamente queste sono indistinguibili, ma **5** di queste sono avvelenate, mentre le altre **5** contengono un antidoto per il veleno. Se si mangia **1** mela avvelenata e **1** mela con l'antidoto non si hanno conseguenze particolari (a parte la sazietà). Il veleno però, se non compensato dall'antidoto, è mortale.
La strega propone a Biancaneve di pescare **2** mele e di mangiarle.

1) Se Biancaneve lo fa qual è la probabilità che sopravviva?

Biancaneve trova che le mele siano molto invitanti e chiede se può prenderne **3**

2) Se Biancaneve pesca **3** mele e le mangia tutte qual è la sua probabilità di sopravvivere?
3) E' più consigliabile per Biancaneve, pescare (e poi mangiare) **1**, **2** o **3** mele? (giustificare)

Esercizio H – Gli gnocchi di Poisson (Processi di Poisson, Sistemi in parallelo)
Al mercato è in vendita un nuovo tipo di pasta: gli gnocchi del pastificio Poisson. Per prepararli basta buttarli nell'acqua bollente e aspettare che siano cotti: finché uno gnocco non è cotto resta sul fondo della pentola, non appena è cotto viene a galla. Il problema è che purtroppo lo gnocco di Poisson non ha un tempo di cottura fisso: ogni gnocco passa da crudo a cotto improvvisamente, ad un istante deciso da un processo senza memoria. Sulla confezione c'è scritto che mediamente il singolo gnocco impiega **10** minuti, per passare da crudo a cotto (e lo fa indipendentemente dagli altri). Qui siamo interessati ai tempi di completamento della cottura per insiemi di gnocchi di Poisson buttati in acqua contemporaneamente.[1]
Ho buttato **4** gnocchi in pentola (l'acqua bolle) e ho fatto partire il cronometro da cucina.
1) Qual è la probabilità che tra **20** minuti non siano ancora tutti cotti?
(non sono tutti cotti = almeno uno non è cotto)
Osservo il sistema dopo **20** minuti: **3** gnocchi sono cotti
2) Qual è ora la probabilità che tra altri **10** minuti non siano ancora tutti cotti?

Esercizio I – Gli gnocchi di Poisson (Processi di Poisson, Binomiale e approssim.Normale)
Il giorno dopo, rinfrancato dal mio esperimento (v. esercizio precedente) butto in pentola **10000** gnocchi (di Poisson) quasi contemporaneamente.
1) Qual è la probabilità **p** che dopo **30** minuti il primo gnocco che ha toccato l'acqua sia cotto?
2) Mediamente dopo **30** minuti dall'inizio della cottura, quanti saranno cotti?
3) Dopo quale tempo posso assumere che saranno cotti il **99.85%** circa degli gnocchi?

Esercizio J – L'orologio a gnocchi (Processi di Poisson, Binomiale e approssim.Normale)
Rinfrancati dai vostri esperimenti (v. esercizi precedenti) decidete di creare una rudimentale clessidra basata sulla considerazione seguente: se si butta uno gnocco di Poisson alla volta (quando uno è cotto, si butta il successivo) il numero di gnocchi visibilmente cotti indica approssimativamente il tempo trascorso dall'inizio dell'esperimento. Dunque per creare un orologio a gnocchi vi basta fare in modo che quando uno gnocco viene a galla un meccanismo faccia cadere nell'acqua lo gnocco successivo. Assumiamo di avere creato il meccanismo in questione e di aver lanciato l'esperimento a mezzanotte.

0) Quali sono la media e la varianza del tempo di cottura di un singolo gnocco?
1) Se il vostro orologio a gnocchi segna mezzogiorno (=**72** gnocchi) in quale intervallo di tempo vi trovate con il **99.7%** di probabilità?

Esercizio K – Anagrammi (Calcolo Combinatorio)
Si considerino le due parole seguenti: "FUNICULI" e "FUNICULA".
1) Gli anagrammi della prima parola sono di più, di meno o in numero pari a quelli della seconda? (giustificare)

[1] Chi non ama gli gnocchi (crudi/cotti) può pensare a componenti hardware (funzionanti/guasti).