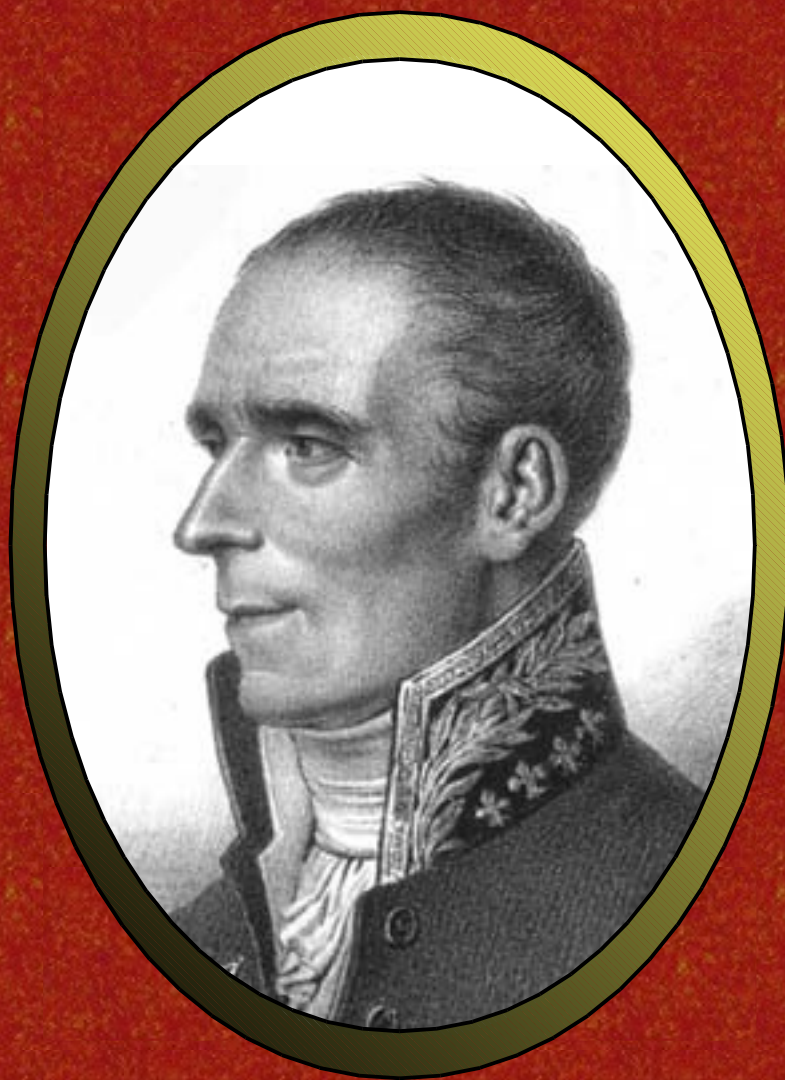


*Pierre-Simon de Laplace*  
*Biografia e studi*



*Progetto di "Matematica del Continuo"*  
*di Cavenaghi Mattia*  
*matricola 640926*



# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

**Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali**

**Dipartimento di Tecnologie dell'Informazione**

**Corso di Laurea in Informatica**

**Polo Didattico e di Ricerca di Crema**

## **PIERRE-SIMON DE LAPLACE BIOGRAFIA E STUDI**

Progetto di "Matematica del Continuo" di

Cavenaghi Mattia

Matricola n. 640926

Anno Accademico 2006 - 2007

## Indice

### **1 - Biografia**

- ◆ La gioventù pag. 1
- ◆ La vita a Parigi pag. 2
- ◆ La Rivoluzione ed il regno del Terrore pag. 3
- ◆ L'Impero napoleonico e la restaurazione della monarchia borbonica pag. 5

### **2 - Gli studi**

- ◆ Exposition du système du monde pag. 7
- ◆ Traité de mécanique céleste pag. 8
- ◆ Théorie analytique des probabilités pag. 9
- ◆ Applicazioni di interesse matematico
  - Laplaciano pag. 10
  - Equazione di Laplace pag. 11
  - Teorema di Laplace sulle matrici quadrate pag. 12
  - Trasformata di Laplace pag. 12
- ◆ Gli strumenti fisici
  - Calorimetro di Lavoisier – Laplace pag. 13
  - Dilatometro di Laplace pag. 14
  - Rotaia di Laplace pag. 14

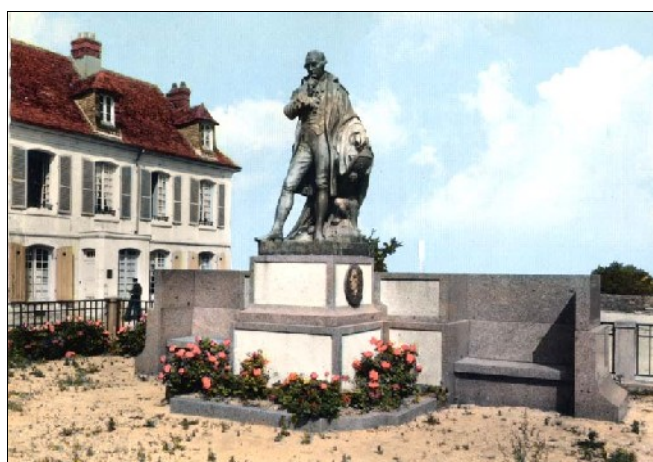
### **Bibliografia e sitografia**

# 1 - Biografia

## *La gioventù*

Ricostruire la vita ed in particolare gli anni giovanili di Laplace, è un compito piuttosto arduo poiché, la corrispondenza personale così come altri documenti originali, i quali erano in possesso dei discendenti dello scienziato, sono andati distrutti nel 1925, nell'incendio del castello di Mailloc in Normandia, dove erano conservati. A causa di questo motivo, dove non sono riuscito a trovare un'esauriente corrispondenza, tra le fonti a cui ho attinto ed impiegate per la stesura di questa biografia, ho preferito lasciare solamente un breve accenno o, nel caso dei riferimenti cronologici, solamente l'anno in cui un particolare evento si è verificato.

Pierre-Simon de Laplace, nacque verso la fine di Marzo del 1749 a Beaumont-en-Auge in Normandia, da Pierre de Laplace, piccolo proprietario terriero e commerciante di sidro e da Marie-Anne Sochon discendente da una ricca famiglia di agricoltori di Tourgéville.



*Figura 1 - Statua commemorativa, dedica dei cittadini di Beaumont-en-Auge, all'illustre concittadino.*

Educato dai parenti e dai più stretti amici di famiglia, Laplace entrò a 7 anni nel seminario benedettino in Beaumont-en-Auge ottenendo, verso la fine sei suoi studi, note di elogio per la sua viva intelligenza e prodigiosa memoria. A 16 anni, lasciò il suo paese natio per trasferirsi al Collège des Arts di Caen (l'odierna Université de Caen), frequentando il corso di Teologia secondo i desideri del padre, il quale sperava che il figlio intraprendesse la carriera ecclesiastica. Nei due anni in cui frequentò l'Università, Laplace, grazie a due docenti di Matematica: Christophe Gadbled e Pierre Le Canu, scoprì, leggendo le opere di Leibniz, il suo interesse per le materie scientifiche, in particolare per la Matematica.

Fu così che all'età di 19 anni, tagliò i contatti con parenti ed amici, lasciò Caen senza laurearsi e, con una lettera di presentazione scritta dal suo professore Le Canu per il matematico Jean-Baptiste Le Rond D'Alembert, si trasferì a Parigi. Lo scienziato, rimase impressionato dal giovane Laplace, dopo che quest'ultimo gli presentò un articolo in cui discuteva i principi della Meccanica. Convinto delle capacità del giovane, D'Alembert lo appoggiò nella candidatura alla docenza in Matematica alla École Militaire (intorno al 1769). All'École, Laplace insegnava Geometria, Trigonometria, Analisi Matematica e Statistica ai giovani cadetti: lavoro poco entusiasmante ma che gli permetteva di guadagnarsi da vivere.

## La vita a Parigi

Negli anni successivi, Laplace scrisse una notevole quantità di articoli tali da renderlo noto alla comunità scientifica come "il Newton francese".

Il suo primo lavoro, venne presentato, alla Académie Royale des Sciences di Parigi il 28 Marzo 1770, dove discusse il metodo di Lagrange utilizzato per il calcolo dei massimi e dei minimi per le curve. Il suo secondo articolo, riguardava le equazioni differenziali e fu presentato alla comunità accademica, il 18 Luglio dello stesso anno. Per vedere la prima pubblicazione di un lavoro da parte di Laplace, si dovrà attendere il 1771: in quell'anno, vide la luce il saggio *Nova acta eruditorum*, inerente il calcolo integrale, scritto in latino e pubblicato a Leipzig (l'odierna Lipsia, in Germania). Nello stesso anno, scrisse un ulteriore saggio intitolato *Recherches sur le calcul intégral aux différences infiniment petites, et aux différences finis*, nella quale formulava importanti equazioni utili nel campo della Meccanica e dell'Astronomia. Nella ristampa del 1774, inserirà in latino, il suo lavoro sui massimi ed i minimi.

Nel 1771, Laplace fece il primo tentativo per l'ingresso alla Académie Royale des Sciences, peraltro fallito, poiché al suo posto vi fece ingresso il matematico Alexandre-Théophile Vandermonde. Tentò di nuovo nel 1772, ma questa volta gli venne preferito Jacques Antoine Joseph Cousin. Il 1 Gennaio 1773, D'Alembert, contrariato per la mancata elezione di Laplace, scrisse al matematico Giuseppe Luigi Lagrange, a quei tempi direttore del Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften (Accademia delle Scienze di Berlino-Brandeburgo), chiedendogli se poteva concedere l'ammissione al suo allievo. Prima che Lagrange potesse acconsentire alla richiesta del collega, Laplace venne ammesso col titolo di Associato, nell'Aprile 1773. Nei tre anni successivi, scrisse tredici articoli inerenti diverse materie, guadagnandosi un elogio da parte del marchese di Condorcet, allora Segretario dell'Accademia delle Scienze francese.

Come accennato in precedenza, Laplace non si dedicò solamente alla Matematica ma anche all'Astronomia ed alla teoria delle Probabilità. A lui si devono i lavori sull'inclinazione delle orbite planetarie e sulla perturbazione lunare dei pianeti: inoltre, in un articolo presentato all'Académie il 27 Novembre 1771, discusse il movimento dei pianeti, lavoro che sarà la pietra portante nel suo studio sulla stabilità del sistema solare.

Gli anni Settanta, furono il periodo di maggior crescita a livello sociale, culturale e professionale tali da rendere Laplace, uno tra i più influenti ed importanti uomini di Scienza mai visti al mondo. Le sue capacità oltre ad essere oggetto di invidia da parte di alcuni colleghi, tra cui il vecchio mentore D'Alembert, accrebbero le vanità dello stesso Laplace e ne incrinarono le poche amicizie.

Gli anni Ottanta, si aprirono con la presentazione, assieme allo scienziato Lavoisier della teoria del calore su cui avrebbe lavorato per il resto della sua vita. Nel 1784, divenne esaminatore alla Accademia Reale di Artiglieria e nel 1785, diede il brevetto al futuro imperatore di Francia: Napoleone Bonaparte. Laplace, durante la sua permanenza come Associato dell'Accademia delle Scienze, fece parte di diverse commissioni d'esame. Ad esempio nel 1782, Lagrange chiese al comitato di valutare per la pubblicazione, il suo *Traité de mécanique analytique*; inoltre, grazie alle sue conoscenze nel campo della Probabilità, partecipò ai lavori di una commissione istituita per l'indagine sui tassi di mortalità negli



Figura 2 - Il Pont des arts ed in secondo piano, l'Institut National des Sciences et des Arts, l'odierna Académie Royale des Sciences, a Parigi.

ospedali di Parigi. Il lavoro di esaminatore, proseguì poi con l'incarico di standardizzare le unità di misura ed il sistema metrico decimale.

Nel 1785, grazie al contributo apportato dai suoi lavori, alla comunità scientifica, Laplace divenne Membro permanente dell'Accademia: due anni dopo, Lagrange, trasferitosi da Berlino a Parigi, ottenne pure lui l'ammissione: la cosa creò rivalità tra i due studiosi, portando un beneficio alla comunità scientifica, in termini di pubblicazioni e studi.

Nella vita privata, il 15 Maggio 1788 Laplace sposò Marie-Charlotte de Courty de Romanges di 20 anni più giovane, dal matrimonio, sarebbero nati due figli: nel 1789 Charles-Emile il quale intraprese la carriera militare, arrivando al grado di generale nell'arma di artiglieria e nel 1792, Sophie-Suzanne. Nello stesso anno in cui nacque il suo primogenito Charles-Emile, più precisamente il 30 Aprile, Laplace venne nominato Fellow (membro) della Royal Society, la più antica società scientifica inglese, fondata a Londra nel 1660.

### ***La Rivoluzione ed il regno del Terrore***

La situazione economica in Francia, alla fine del XVIII secolo era critica: la recente guerra combattuta a fianco delle colonie americane contro l'Inghilterra (1775-82) e gli sperperi del re Luigi XV, aggravarono il già malridotto bilancio dello Stato. Lo stesso re, politicamente, era un fantoccio nelle mani della nobiltà, la quale deteneva il potere in Francia ed era basata ancora su una società di tipo feudale.

Verso la metà del secolo, era nata una nuova corrente di pensiero, chiamato *Illuminismo* che influenzò l'Europa sia socialmente che politicamente: in Francia gli illuministi, chiesero che venisse promulgata una Costituzione, richiesta a gran voce dal popolo; il disagio in cui quest'ultimo viveva, venne manifestato con la trasformazione degli Stati Generali che erano l'organo di rappresentanza delle tre classi sociali francesi: clero, nobiltà e terzo stato (il popolo), nell'Assemblea Nazionale Costituente (5 Maggio 1789). I membri si arrogarono la facoltà di poter estinguere il debito pubblico e dare alla nazione la tanto sospirata Costituzione; gli obiettivi prefissati non vennero raggiunti ed i cittadini di Parigi, oramai esasperati, assaltarono la Bastiglia, allora prigione di Stato, nella giornata del 14 Luglio 1789, dando così inizio ad un periodo di cambiamenti politici ed sociali, denominato Rivoluzione francese.

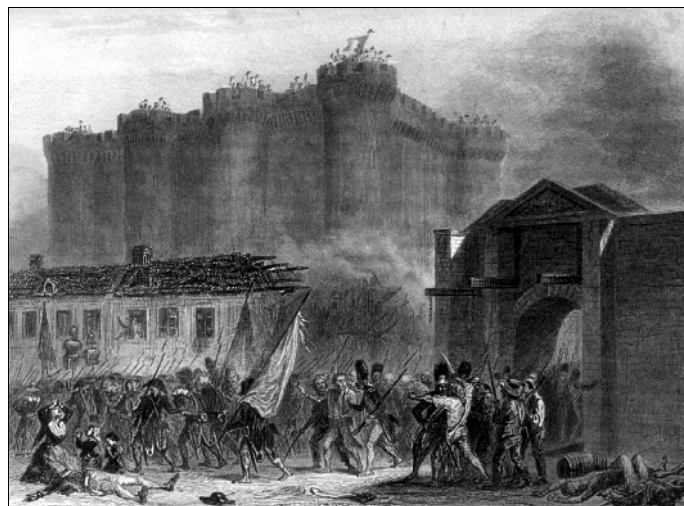


Figura 3 - La presa del carcere della Bastiglia, avvenuta il 14 Luglio 1789.

Il 4 Agosto dello stesso anno, l'Assemblea Costituente, votò a favore dell'abolizione del sistema feudale e, tra il 20 e 26 Agosto venne approvata la Dichiarazione dei diritti dell'uomo. Nell'Autunno del '89, il nuovo re Luigi XVI ed i componenti dell'Assemblea, non essendo riusciti a migliorare le condizioni di vita del popolo francese ed ad estinguere il debito pubblico, scapparono a Parigi ma vennero fermati dai membri estremisti della Rivoluzione.



Nel Settembre del 1791, la Francia vide finalmente la Costituzione senza però aver risolto i problemi finanziari: due anni dopo, nel Gennaio del 1793, Luigi XVI venne ghigliottinato assieme alla giovane consorte Maria Antonietta (Ottobre del '93). Nello stesso anno (31 Maggio 1793), avvenne una violenta lotta per il potere, tra i membri del partito della Gironda (antimonarchici) ed i giacobini (dapprima monarchici e successivamente repubblicani "intransigenti") che si concluse con la vittoria dei giacobini, capeggiati da Robespierre, inaugurando così il periodo del Terrore presieduto dal Comitato di Salute Pubblica e dall'ascesa al potere dei meno abbienti (2 Giugno 1793).

L'Accademia come tutti gli istituti d'istruzione, venne chiusa nell'Agosto del '93. Solo alcune commissioni sopravvissero, tra cui quella sulla standardizzazione delle misure e dei pesi, ma Laplace, assieme a Lavoisier, Coulomb ed altri, vennero destituiti dai loro incarichi, poiché considerati monarchici e nemici della neonata Repubblica.



Figura 4 - Ritratto di Maximilien de Robespierre, capo del partito giacobino e fautore della dittatura del Terrore.

Poco prima che scoppiasse il periodo del Terrore, Laplace con la sua famiglia lasciò Parigi, facendovi ritorno solamente nel 1794: durante questo periodo, molti membri della comunità scientifica, caddero vittime della dittatura come pure Lavoisier, il quale svolgendo l'odiata attività di esattore delle tasse, fu ghigliottinato l'8 Maggio 1794 ed il marchese di Condorcet, fu dapprima imprigionato e successivamente morì avvelenato. Lo stesso Laplace, sebbene fosse un'opportunist, evitò di poco il patibolo. Assieme a Lagrange e Joseph-Jérôme Le Français de Lalande, studiò la riforma del calendario adottato dalla Repubblica francese: il problema principale, consisteva nel far coincidere il nuovo calendario con quello astronomico; sempre in questo periodo, effettuò alcuni lavori sulla suddivisione metrica degli angoli.

Il 27 Luglio del 1794, dopo una lotta interna (giornata del Termidoro) tra Robespierre ed alcuni elementi estremisti del suo partito, la dittatura del Terrore cessò, portando al potere la nuova ricca borghesia che fece ghigliottinare Robespierre (29 Luglio 1794) e varò una nuova costituzione nell'Ottobre 1795. Le recenti vittorie nella campagna militare in Belgio ed il crescente impiego del cittadino-soldato in nuove campagne espansionistiche, avrebbero chiuso il sanguinoso periodo della Rivoluzione e ne avrebbero aperto un altro (forse ancor più cruento): la dittatura militare bonapartista.

Nel 1795, grazie allo sforzo di alcuni docenti, venne fondata la École Normale e Laplace ottenne l'attivazione dell'insegnamento del corso di Probabilità da cui, nel 1814 avrebbe tratto il suo *Essai philosophique sur les probabilités*. La Scuola, per un fatto incomprensibile, sopravvisse solo quattro mesi. Sempre nel '95, l'Académie des Sciences venne riaperta col nome di Institut National des Sciences et des Arts. Successivamente, assieme a Lagrange, venne istituito il Bureau des Longitudes<sup>1</sup>, Laplace sarebbe stato chiamato a dirigere sia il Bureau che l'Osservatorio di Parigi. Nel 1796 Laplace, divenne Presidente dell'Istituto delle Scienze e pubblicò la sua ipotesi sulle nebulose col titolo *Exposition du système du monde*, dove espresse le proprie opinioni riguardo alla formazione del sistema solare.

<sup>1</sup> *Bureau des Longitudes*: è un ente istituito nel 1795, dalla Convenzione Nazionale ed avente sede a Parigi. Tale ente, ha il compito di sovrintendere a studi nel campo dell'Astronomia e delle discipline ad esse connesse.

## **L'Impero napoleonico e la restaurazione della monarchia borbonica**

Dopo un periodo di successi militari nei Paesi Bassi e, con lo sfaldamento della I Coalizione antifrancese (1795-97), la Francia risanò temporaneamente il suo deficit finanziario ma, la II Coalizione (1799-1800) riuscì a liberare i territori italiani dal dominio francese. L'esercito repubblicano inoltre, subì un'ulteriore sconfitta nelle battaglie in Egitto causando la dimissione in Francia del Direttorio e, portando al potere con un colpo di stato, avvenuto tra il 9 ed il 10 Novembre 1799, il giovane generale Napoleone Bonaparte.

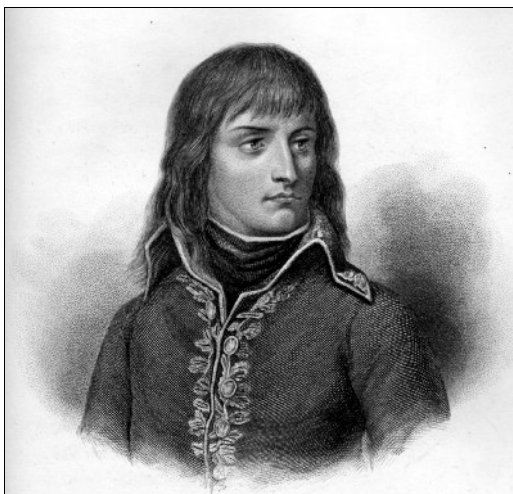


Figura 5 - Ritratto di Napoleone Bonaparte in gioventù.

Con la nascita dell'Impero, Laplace venne nominato Senatore (1802) e successivamente Cancelliere del Senato (1814), ricevendo tra l'altro, la nomina a Grand'Ufficiale della Legione d'Onore nel 1806. Nel suo *Mémorial de Sainte-Hélène*, scritto durante l'esilio sull'isola di S. Elena, Napoleone disse che nel 1799, dovette destituire Laplace dopo sole sei settimane, dall'incarico di Ministro dell'Interno, poiché applicava il concetto di infinitesimo al suo lavoro, risultando troppo pignolo e creando nuovi problemi a quelli già esistenti. Nonostante tutto, venne nominato conte dell'Impero nel 1806.

Volendo ricoprire un ruolo di maggior rilievo nel campo della Fisica, Laplace assieme al chimico Claude Louis Berthollet, fondò nella sua casa, nel 1805 la Société d'Arcueil.

La società, svolgeva il suo operato in modo analitico, segno fondamentale del modo di agire di Laplace così come all'Institut delle Scienze e nei corsi all'École Polytechnique. Dopo la pubblicazione del quarto volume della *mécanique céleste*, Laplace proseguì i propri studi sulla teoria sulla capillarità (1806-1807), sul fenomeno della doppia rifrazione (1806-1807) e sullo studio sulla velocità del suono (1816); riprese ed ampliò la sua teoria del calore, applicandola alla forma e rotazione della Terra (1817-1820). Infine, studiò anche il fenomeno dell'elasticità (1821). Sebbene Laplace, avesse dato notevoli contributi al mondo scientifico, il suo prestigio decadde con l'avvento di una nuova generazione di studiosi, i quali portarono un approccio più moderno allo studio della Fisica. La stessa Société d'Arcueil, dopo aver attraversato un periodo di declino, segnato da una notevole riduzione degli incontri scientifici (1812), si sciolse nel 1813. Dominique-François Arago, membro della dissolta Société, sviluppò assieme a Augustin-Jean Fresnel, una teoria delle onde luminose<sup>2</sup>, in contrapposizione alla teoria corpuscolare<sup>3</sup> di Laplace. Molti altri lavori di quest'ultimo vennero criticati, tra cui la sua versione della teoria del calore, contrapposta a quella di Petit e Joseph Fourier. Ignorando il suo decadimento professionale ed intellettuale, Laplace all'età di 60 anni, continuò i suoi studi e scrisse nuovi articoli inerenti la termodinamica, la teoria della luce e quella dei fluidi. La prima edizione dei suoi lavori sulle Probabilità, intitolata: *Théorie analytique des probabilités*, comparve il 1812 con una dedica a "Napoleon le Grand", dedica che nelle successive edizioni, per ovvi motivi, venne opportunamente rimossa. Un anno dopo, nel 1813, Laplace ottenne la nomina a Fellow

2 *Teoria ondulatoria della luce*: proposta da C. Huygens (★1629 - †1695) nel 1678; questa ipotesi, afferma l'esistenza dell'*ether*, una materia elastica molto tenue, la quale compenetra tutto lo spazio, sia esso occupato o no da materia ordinaria. La luce sarebbe quindi nient'altro che il movimento locale dell'etere "per superfici ed onde sferiche", generate dall'agitazione delle particelle del corpo luminoso. Tali onde si muovono nello spazio, quindi nel loro "movimento successivo", investono le vicine particelle di etere mettendole in vibrazione, dando così luogo al fenomeno di propagazione della luce.

3 *Teoria corpuscolare della luce*: evoluzione della teoria atomistica di R. Descartes (★1596 - †1650), a cui si riallaccia, venne proposta nel 1704 da Newton. Secondo questa congettura, i corpi luminosi, lanciano in ogni direzione minutissimi corpuscoli i quali, colpendo l'occhio, generano la visione. Tale teoria, venne abbandonata in favore della teoria ondulatoria, di cui Fresnel fu appunto uno dei maggiori sperimentatori e sostenitori.



della Royal Society di Edinburgo.

In ambito familiare, lo scienziato, venne colpito da un lutto: sua figlia, Sophie-Suzanne, moglie del marchese De Portes, morì durante il parto nel 1813. A differenza del figlio Charles-Emile, che non ebbe mai figli, Sophie diede a Laplace un nipote che fu il suo unico discendente.

Dopo la sconfitta dell'esercito imperiale sui campi di battaglia in Russia (1812) ed a Lipsia (16-18 Ottobre 1813), Napoleone fu costretto ad abdicare e fu esiliato sull'isola d'Elba (6 Aprile 1814).

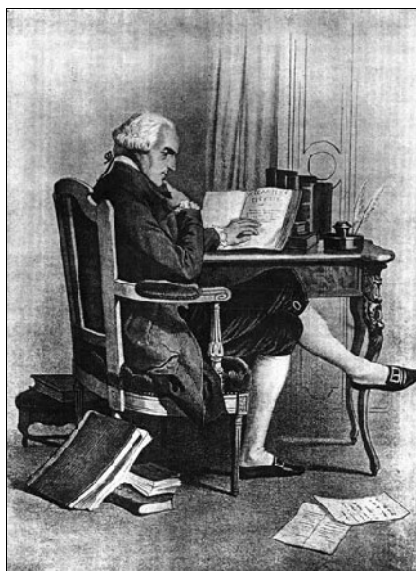


Figura 6 - Un momento di studio:  
Laplace in contemplazione davanti  
alla sua opera sulla meccanica  
celeste.

Con i vari cambi di potere subiti dalla Francia, Laplace cambiò altrettante volte il suo pensiero politico, attirandosi le ire dei colleghi invidiosi per i suoi lavori. Nel 1814, ad esempio, dopo esser stato sostenitore dell'Impero, votò in Senato a favore della restaurazione della monarchia, cosa che gli fece guadagnare il titolo di marchese e la nomina alla Camera dei Pari (1817). Durante il breve governo di Napoleone scappato dall'esilio (governo dei Cento Giorni, 1° Marzo - 18 Giugno 1815), Laplace dovette abbandonare temporaneamente Parigi. Col ritorno del re, lo scienziato venne accolto nell'Académie Française (11 Aprile 1816) e divenne poi sostenitore della monarchia, attirandosi ulteriori antipatie nei circoli politici. Nel 1826, per aver rifiutato di firmare un documento sulla libertà di stampa, redatto dalla comunità scientifica parigina, perse i suoi ultimi estimatori.

Nella mattina del Lunedì 5 Marzo 1827, Pierre-Simon de Laplace, si spense all'età di 78 anni. Nel suo elogio funebre, si può leggere che lo scienziato, così come Lagrange ed altri grandi studiosi francesi, sfuggirono alla morte durante la rivoluzione, poiché il mondo aveva bisogno del loro sapere:

*«Questa volta è stata la scienza a proteggere i suoi discepoli!»*

Nello stesso giorno della morte, tutti gli incontri tenuti presso l'Accademia delle Scienze, vennero sospesi in segno di lutto e rispetto verso uno dei più grandi scienziati di tutti i tempi inoltre, il suo posto come Membro all'Istituto delle Scienze, rimase vacante fino all'Autunno del 1827 quando venne nominato suo successore Siméon-Denis Poisson.

## 2 - Gli studi

Numerosi sono i contributi di Laplace. Tra quelli citati dall'Accademia delle Scienze francese, possiamo ricordare:

- ✓ *Théorie du mouvement et de la figure elliptique des planètes (1784)*
- ✓ *Théorie des attractions des sphéroïdes (1785)*
- ✓ *Leçons d'analyse (1795)*
- ✓ *Exposition du système du monde (1796)*
- ✓ *Traité de mécanique céleste (1799-1825)*
- ✓ *Théorie analytique des probabilités (1812)*
- ✓ *Essai philosophique sur les probabilités (1814)*
- ✓ *Précis de l'histoire de l'astronomie (1821)*

Prima di illustrare alcuni strumenti matematici ideati dallo scienziato, durante i suoi studi, è opportuno soffermarci sulle alcune delle sue opere di maggior rilievo.

### **Exposition du système du monde**

L'*Exposition*, era composta di cinque volumi così suddivisi:

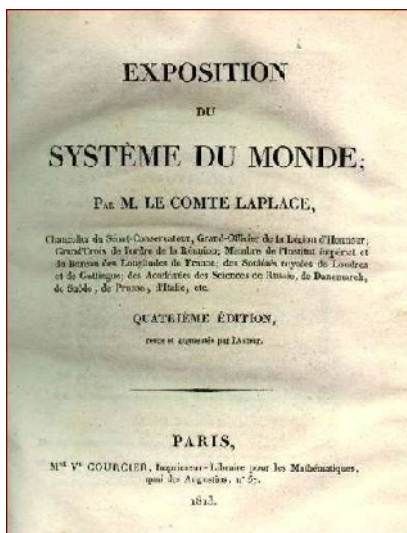


Figura 1 - Frontespizio dell'opera, in un'edizione del 1813.

- ✓ Primo volume: si tratta del moto apparente dei corpi celesti, del moto delle maree<sup>4</sup> e viene illustrata la teoria della rifrazione della luce nell'atmosfera;
- ✓ Secondo volume: vengono approfonditi i temi riguardanti il moto dei corpi celesti;
- ✓ Terzo volume: viene effettuato uno studio sulla natura fisica della Forza e del Movimento;
- ✓ Quarto volume: viene esposta la teoria della gravitazione universale. Vengono ripresi i temi del moto delle maree e si studia la forma della Terra (geoide);
- ✓ Quinto volume: Laplace, in quest'ultimo volume, espone una storia dell'Astronomia e presenta la sua ipotesi sulle nebulose nota come *ipotesi cosmogonica*.

*Ipotesi cosmogonica di Laplace:* Laplace suppose che originariamente il Sole, fosse un immenso globo gassoso (o nebula) avente una forte condensazione centrale, estendentesi al di là dell'orbita di Nettuno (che era l'ultimo pianeta conosciuto). A differenza del filosofo Immanuel Kant<sup>5</sup>, Laplace suppose che questa nebula

4 *Moto delle maree:* per lo studio delle maree, Laplace perfezionò la sua *formula ipsometrica*, con cui viene espressa la relazione che stabilisce l'andamento della pressione atmosferica, al variare della quota, utilizzata per effettuare la correzione altimetrica delle letture barometriche, riportando il valore della pressione atmosferica misurato in un certo luogo, a quello che si avrebbe se il luogo in questione fosse al livello del mare; viene utilizzata anche per calcolare la differenza di pressione atmosferica, in due luoghi posti a differente quota.

5 *Ipotesi cosmogonica di Kant:* formulata nel 1755, nel trattato di geofisica *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels*. Ivi, l'autore, tentò di spiegare per mezzo della legge di gravitazione i successivi stadi di evoluzione dell'intero universo ed in particolare del sistema solare, supponendolo derivato da una grande massa caotica di gas e polvere cosmica priva di moto, nella quale le parti più condensate dovettero pian piano attrarre le particelle meno dense ed originare con ciò un primo movimento. Questi moti aventi direzioni differenti, avrebbero causato frequenti collisioni, le quali avrebbero poi originato moti rotatori dei centri più condensati. Dal centro di attrazione, già in moto sufficientemente rapido, si sarebbero staccate infine alcune masse di gas (i pianeti) e da queste, ancora allo stato gassoso, alcune masse che avrebbero dato origine ai satelliti.

ruotasse; la rotazione sarebbe poi divenuta sempre più rapida a mano a mano che la nebula si contraeva per effetto della forza gravitazionale. Raggiunta una rotazione sufficientemente rapida, si sarebbe staccato un primo anello, il quale avrebbe seguito a roteare nel piano equatoriale della nebula, nella stessa direzione del senso di rotazione di essa. Alla fine la materia dell'anello, si sarebbe riunita in un'unica concentrazione gassosa per dare origine al primo pianeta; la formazione degli altri pianeti e dei loro satelliti, sarebbe avvenuta in un modo analogo.

La teoria di Laplace dà spiegazione delle principali caratteristiche del sistema solare: senso comune del moto di rotazione e rivoluzione dei pianeti, piccole inclinazioni dei loro piani orbitali sul piano dell'equatore solare, piccole eccentricità delle loro orbite. Sebbene oggi, questa teoria sia stata abbandonata in favore della teoria del Big Bang, oggi giorno occupa un posto d'onore nella storia della Scienza.

Grazie all'*Exposition*, Laplace diede la sua personale visione della Scienza: egli difatti, non considerava tale disciplina, come una elencazione di fenomeni ma, come la ricerca e la scoperta delle leggi e delle relazioni che sussistono tra i fenomeni naturali.

Sempre in quest'opera, l'autore descrive anche lo scenario che si andrebbe figurando nel caso in cui un meteorite, colpisse il nostro pianeta:

*«La probabilità di un impatto, aumenta col passare dei secoli. Nel caso l'evento si verificasse, l'asse di rotazione della Terra, verrebbe modificato e la gran parte degli esseri viventi del nostro pianeta, verrebbe uccisa dalle onde anomale o dai terremoti originati dal fenomeno.»*

L'*Exposition*, infine, venne utilizzata come "introduzione" al suo successivo lavoro, il *Traité de mécanique céleste* il quale sarebbe stato pubblicato tre anni dopo.

### **Traité de mécanique céleste**

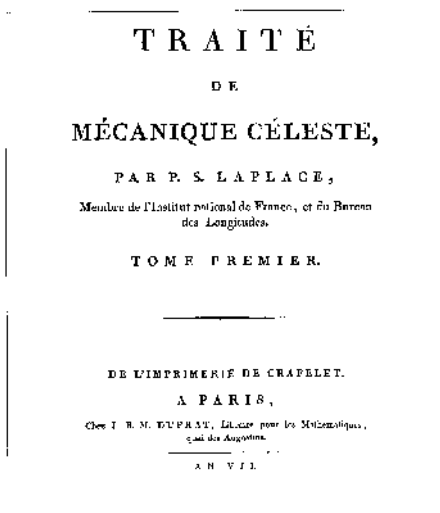


Figura 2 - Frontespizio dell'opera da un'edizione del 1799 (VII anno rivoluzionario).

Nel 1786, Laplace aveva scoperto l'invariabilità dei moti planetari, dimostrando che l'eccentricità e l'inclinazione delle orbite planetarie, rimangono tra loro piccole, costanti ed autocorrettive; questo ed altri precedenti lavori, furono la base del suo trattato su cui avrebbe lavorato fino alla tarda età. Originariamente, l'opera fu pubblicata in cinque volumi, i cui primi due comparvero nel 1799.

Il primo volume riguardante la meccanica celeste, era suddiviso in ulteriori due parti: la prima parte riguardava la legge generale dell'equilibrio dei solidi e dei fluidi, mentre la seconda si dedicava alla legge della gravitazione universale e del moto dei centri di gravità dei corpi, nel sistema solare. Il metodo adoperato per dimostrare le sue teorie, era quello di utilizzare le equazioni differenziali da cui, una volta risolte, avrebbe ottenuto la dimostrazione alle sue ipotesi.

Nel secondo volume della meccanica celeste, Laplace fece largo uso della Meccanica, applicandola allo studio dei pianeti, dove incluse un ulteriore studio sulla forma della Terra<sup>6</sup>, utilizzando dati ottenuti da diverse spedizioni scientifiche ed

<sup>6</sup> *Forma della Terra (geoide)*: in particolare, Laplace dimostrò che la forma terrestre, a dispetto delle teorie dell'epoca, non corrispondeva ad un ellissoide perfetto, ed avesse uno schiacciamento ai poli pari a 1/300. Solamente grazie ai rilevamenti di F. W. Bessel e K. F. Gauss, si arriverà a definire la superficie matematica della Terra che, nel 1873, grazie a J. B. Listing, verrà denominata geoide.

applicando la teoria degli errori inoltre, fu uno dei primi astronomi a descrivere il fenomeno dei buchi neri<sup>7</sup>.

Infine, in uno dei successivi volumi, introdusse l'uso della sua omonima equazione e, cosa più curiosa, propose il *coefficiente di Laplace* il quale in realtà, era già noto come funzione di Legendre.

### ***Théorie analytique des probabilités***

La prima edizione, venne pubblicata nel 1812 ed era composta da due volumi che, nella edizione successiva, vide un aumento del 30% del materiale di studio.

Il primo libro, conteneva uno studio sulle funzioni generatrici ed uno studio sull'approssimazione di varie espressioni della teoria delle Probabilità. Il secondo libro, invece conteneva la definizione di Probabilità ideata da Laplace<sup>8</sup>, inoltre venivano presentate: la regola di Bayes (così chiamata diversi anni dopo da Jules-Henri Poincaré), il metodo dei minimi quadrati, la probabilità inversa ed il problema di Buffon<sup>9</sup>.

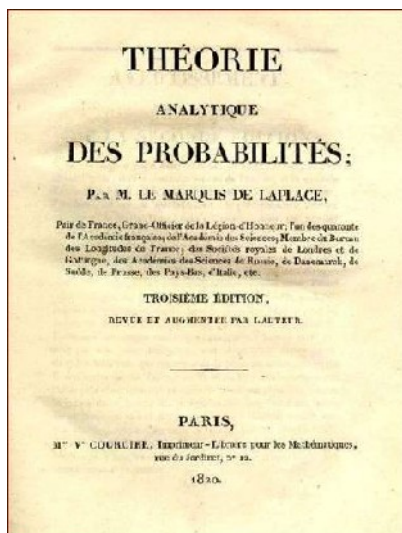


Figura 3 - Frontespizio dell'opera da un'edizione del 1820.

Nelle successive edizioni di quest'opera, Laplace riporta anche alcune applicazioni facenti largo uso della Probabilità, come lo studio sul calcolo del tasso di mortalità, dell'aspettativa di vita e della durata di un matrimonio. Successivamente, vennero discussi gli errori nelle osservazioni e nella determinazione delle masse di Saturno, Giove ed Urano. Infine, vennero affrontati alcuni problemi di geodesia, tra cui la determinazione del meridiano francese<sup>10</sup>.

Nella *Théorie*, comparve inoltre l'utilizzo dei *punti di Laplace*, ossia: punti della superficie terrestre, vertici di una triangolazione, nei quali, oltre ad essere noti gli elementi geodetici quali latitudine, longitudine, ed azimut ellissoidici (cioè riferiti alla normale dell'ellissoide di riferimento terrestre), siano determinati con osservazioni dirette anche l'azimut e la longitudine astronomica (cioè riferiti alla normale del geoido). I punti di Laplace hanno importanza poiché permettono di riconoscere l'esattezza delle operazioni e dei calcoli geodetici.

7 *Buco nero*: negli ultimi anni, numerosi fisici, sono giunti a pensare che tale oggetto, sarebbe il residuo straordinariamente denso, di una stella gigante scomparsa che si sarebbe ristretta o, più esattamente, raggomitolata su se stessa, condensandosi al punto da divenire invisibile. A causa della sua densità, formerebbe, per tutto quello che si trova nei suoi dintorni, un polo d'attrazione così potente che niente, né materia, né radiazioni, potrebbero sfuggire alla sua azione. Così tutti i raggi di luce passanti in vicinanza di un buco nero, sarebbero irrimediabilmente catturati da quest'ultimo.

8 *Teoria delle Probabilità*: (secondo Laplace) «(...) La Probabilità è relativa, in parte, a causa della nostra ignoranza ed in parte, a causa della nostra conoscenza. (...) La teoria delle Probabilità, consiste nel ridurre tutti gli avvenimenti che possono aver luogo in una data circostanza, ad un certo numero di eventi ugualmente possibili, di cui siamo indecisi sulla loro esistenza e, sulla distinzione tra questi casi, del numero di eventi favorevoli all'avvenimento da valutare. La probabilità che si verifichi un evento, è quindi il rapporto tra il numero di eventi favorevoli ed il numero di eventi totali. (...)»

9 *Problema del chiodo di Buffon*: è uno dei più antichi problemi inerenti la Probabilità Geometrica. Formulato nel 1777 da G. L. Leclerc, conte di Buffon (★1707- †1788), l'esperimento consisteva nel lasciar cadere un ago od un chiodo su un foglio, avente tracciate a distanza unitaria, delle linee parallele. Il risultato rilevato fu che il valore della probabilità che un chiodo incrociasse una delle linee, era strettamente collegata al parametro  $\pi$ .

10 *Meridiano francese*: situato a 2° 20' 14.025", assieme al meridiano di Antwerp (nelle Fiandre), fu al centro di una disputa, risolta con l'adozione nel 1884, del meridiano di Greenwich come meridiano fondamentale. Laplace, in particolare, contribuì assieme a Legendre e K. F. Gauss alla stesura della teoria degli errori e della propagazione degli errori che permise di scoprire gli errori di rilevamento, commessi da J. B. J. Delambre e P. F. A. Méchain, nella triangolazione effettuata tra Dunkerque e Montjuick (Barcellona). Solamente grazie al contributo di Arago (1806 - 1809), la posizione del meridiano venne ricalcolata con precisione.

Molti di questi lavori, vennero effettuati tra il 1817 ed il 1819 ed inseriti nell'edizione del 1820; ulteriore materiale peraltro di minore interesse, fu inserito nell'edizione del 1825.

Concludendo la presentazione di quest'opera, è necessario far notare che, nella seconda edizione del 1814, Laplace aggiunse un'introduzione: *l'Essai philosophique sur les probabilités*, in cui si trova il famoso passo sulla matematica in grado di predire il futuro del mondo:

*«Dobbiamo considerare lo stato presente dell'universo come l'effetto del suo stato anteriore e come la causa del suo stato futuro.*

*Un'Intelligenza che, per un dato istante, conoscesse tutte le forze da cui è animata la natura e la situazione rispettiva degli esseri che la compongono, se per di più fosse abbastanza profonda per sottomettere questi dati all'analisi, abbraccerebbe nella stessa formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e dell'atomo più leggero: nulla sarebbe incerto per essa e l'avvenire, come il passato, sarebbe presente ai suoi occhi.*

*Lo spirito umano offre, nella perfezione che ha saputo dare all'astronomia, un pallido esempio di quest'Intelligenza. Le sue scoperte in meccanica e in geometria, unite a quella della gravitazione universale, l'hanno messo in grado di abbracciare nelle stesse espressioni analitiche gli stati passati e quelli futuri del sistema del mondo.»*

Con tali parole, Laplace può essere considerato come uno dei padri fondatori della *Filosofia della Scienza* e del *Determinismo*, secondo cui il mondo sarebbe costruito e determinato dalle leggi matematiche che, lungi dal voler raggiungere la conoscenza dell'Universo riservata all'Intelligenza suprema, permetterebbero però all'uomo di avvicinarsi per approssimazioni successive.

Non si può quindi, non citare l'episodio in cui Napoleone, "amico" di Laplace, lo criticò per aver scritto un'opera sul sistema dell'Universo (il *Traité de mécanique céleste*), senza far menzione del suo creatore, Dio.

Lo scienziato, in risposta all'allusione dell'imperatore, disse semplicemente:

*«Non ho avuto bisogno di quest'ipotesi.»*

### **Applicazioni di interesse matematico**

Dopo aver tracciato il profilo biografico e formativo di Laplace, si può passare, all'illustrazione di alcune teorie matematiche:

- *Laplaciano* (od *operatore di Laplace* o *parametro differenziale secondo*): data una funzione  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , l'espressione:

$$(1) \quad \Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} ;$$

si chiama *laplaciano* della funzione  $u$ , o in modo equivalente è la *divergenza del gradiente* di  $u$ :

$$(2) \quad \Delta_2 u = \text{div}[\text{grad}(u)] .$$

Esso interviene in molte questioni di Matematica, in particolare nell'equazione che caratterizza le funzioni armoniche, che si scrive nella forma:

$$(3) \quad \Delta_2 u = 0 \quad .$$

Nel caso  $u$ , sia funzione delle coordinate di un punto nello spazio ordinario tridimensionale, a seconda che le coordinate siano cartesiane  $(x, y, z)$ , polari  $(r, \theta, \varphi)$  o cilindriche  $(r, \theta, z)$ , si ha rispettivamente:

$$(4) \quad \Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad , \text{ per le coordinate cartesiane;}$$

$$(5) \quad \Delta_2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \quad , \text{ per le coordinate polari;}$$

$$(6) \quad \Delta_2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad , \text{ per le coordinate cilindriche.}$$

• *Equazione di Laplace*: fu applicata dall'autore nelle ricerche sulla matematica celeste, è l'equazione lineare omogenea alle derivate parziali seconde:

$$(1) \quad \Delta_2 u = 0 \quad ;$$

ottenuta eguagliando a zero il laplaciano della funzione  $u$ . La soluzione generale dell'equazione è detta *funzione armonica*. Nel caso in cui si adottino coordinate polari, una possibile soluzione è:

$$(2) \quad u(r, \theta, \varphi) = A r^n P_l(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad ;$$

dove  $A$  è una costante arbitraria ed  $l, m, n$  sono numeri interi,  $P_l$  è il *polinomio di Legendre*<sup>11</sup> in  $\theta$  di *ordine*  $l$ ,  $e$  è la base dei logaritmi naturali ed  $i$  l'unità immaginaria.

Per polinomio di Legendre (variante della *formula di Rodrigues*<sup>12</sup>) (3):

$$(3) \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad ;$$

si intende il polinomio che soddisfa alla seguente *equazione differenziale di Legendre* (4) e che si annulla in corrispondenza di  $n$  valori distinti dell'intervallo  $(-1, 0, 1)$ :

$$(4) \quad \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d}{dx} P(x) \right] + n(n+1) P(x) = 0 \quad \text{con } (n = 0, 1, 2, \dots).$$

L'equazione di Laplace, nelle forme per coordinate cartesiane, polari o cilindriche (viste in precedenza), compare in problemi riguardanti il calcolo del campo gravitazionale, elettrico, magnetico ed in Fluidodinamica.

11 *A. M. Legendre*: (★1752 - †1833) matematico francese, insegnò alla École militaire, nel 1812, succedette a Lagrange al Bureau des Longitudes e fu infine, esaminatore all'École Polytechnique. Oltre ai polinomi, viene ricordato per i suoi studi sulle forme canoniche per gli integrali ellittici; è inoltre ricordato per le omonime funzioni sferiche.

12 *B. O. Rodrigues*: (★1794 - †1851) matematico ed economista francese, studiò in Cinematica, la composizione di due o più spostamenti rigidi formulando un teorema secondo cui ogni spostamento rigido, si può realizzare mediante uno spostamento elicoidale. Scrisse inoltre un'opera sulla teoria matematica della cassa ipotecaria delle banche. In campo matematico, viene ricordato per le formule, utilizzate in Geometria differenziale.



- *Teoremi di Laplace sulle matrici quadrate:*

Sia  $A$ , una matrice quadrata di ordine  $n$ :

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} .$$

Si definisce *minore complementare* di un elemento  $a_{ik}$ , il determinante della matrice di ordine  $(n - 1)$  che si ottiene da  $A$ , togliendo la riga e la colonna a cui appartiene l'elemento in questione.

Si chiama inoltre, *complemento algebrico* di un elemento  $a_{ik}$ , il suo minore complementare, dotato di segno a seconda che  $a_{ik}$  sia di posto pari o dispari.

*Primo teorema di Laplace:* il valore del determinante di una matrice quadrata di ordine  $n$ , è uguale alla somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) per i rispettivi complementi algebrici:

$$(2) \quad \det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{j=1}^n a_{nj}A_{nj} .$$

L'applicazione del primo teorema di Laplace, fornisce la regola per lo sviluppo di un determinante, nota come *regola di Laplace*.

*Secondo teorema di Laplace:* la somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) di una matrice quadrata, per i complementi algebrici di un'altra riga (o colonna), è sempre uguale a zero:

$$(3) \quad a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = \sum_{i=1}^n a_{in}A_{jn} = 0 \quad \text{se } i \neq j .$$

Le formule (2) e (3), possono essere generalizzate mediante il *simbolo di Kroneker*:

$$(4) \quad \sum_{l=1}^n a_{il}A_{jl} = \det(A)\delta_{ij} = [A]\delta_{ij} ;$$

analogamente, sviluppando rispetto alle colonne, si avrà:

$$(5) \quad \sum_{l=1}^n a_{li}A_{lk} = \det(A)\delta_{ik} = [A]\delta_{ik} .$$

- *Trasformata di Laplace (od integrale o sviluppo integrale di Laplace):* è l'operazione che fa passare da una data funzione  $g(t)$  della variabile reale  $t$ , alla funzione  $f(z)$  della variabile complessa  $z$ :

$$(1) \quad f(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} g(t) dt ;$$

La funzione  $f(z)$  esiste solo se l'integrale di Laplace è convergente per un valore di  $z$  complesso. La trasformata di Laplace permette di associare *equazioni algebriche* ad *equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti*. Si chiama *trasformazione inversa di Laplace* l'operazione mediante la quale si ritorna alla funzione originaria che allora viene detta *trasformata inversa di Laplace* della  $f(z)$ :

$$(2) \quad g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zt} f(z) dz ;$$

dove  $i$  è l'unità immaginaria e  $c$  è un numero reale tale che:

$$(3) \quad \int_0^{\infty} e^{-ct} |f(t)| dt ;$$

sia convergente.

La relazione ora scritta è nota anche come formula di Riemann-Fourier. La trasformazione inversa di Laplace è particolarmente importante in quanto consente di esprimere funzioni della variabile  $t$  (tempo) come somme di funzioni sinusoidali, con ampiezza che varia in modo esponenziale nel tempo; come tale, è di portata più generale della trasformazione inversa di Fourier ottenuta dalla (1) limitando la variabile  $z$  a valori puramente immaginari: ciò dà luogo a componenti sinusoidali di ampiezza costante.

Le *trasformazioni di Laplace*, inversa e diretta, introdotte nel 1773 hanno grandissima importanza nell'Analisi Matematica così come in Fisica Matematica ed in varie questioni tecniche (analisi di circuiti elettrici, propagazione di segnali elettrici, teoria dei servosistemi, teoria dei segnali, ect.).

### **Gli strumenti fisici**

Oltre alle opere intellettuali, Laplace realizzò (anche in collaborazione con altri colleghi) alcuni strumenti utilizzati nei suoi studi fisici. Tra di essi possiamo ricordare:

#### *Calorimetro di Lavoisier - Laplace*



Figura 4 - Calorimetro di Lavoisier - Laplace.

Questo strumento, è costituito da tre contenitori metallici di forma cilindrica messi uno dentro l'altro e, da due rubinetti posti sul fondo, i quali consentono lo svuotamento delle camere. Il recipiente più esterno contiene ghiaccio e serve ad isolare termicamente quello interno. In quest'ultimo è sospeso un cestello contenente la sostanza campione, a contatto con una certa quantità di ghiaccio il quale viene fuso dal calore emesso dalla sostanza in esame. L'acqua di fusione, viene poi raccolta e pesata, consentendo di calcolare il calore specifico della sostanza campione, proporzionale alla quantità di ghiaccio fuso.

Tale esperimento consentì a Lavoisier e Laplace, di determinare il calore specifico di numerose sostanze e di porre le basi della Termochimica; costituì inoltre un mirabile esempio di sperimentazione, tesa ad ottenere misure numeriche di quantità fisiche.

*Dilatometro di Laplace*



Figura 5 - Dilatometro di Laplace.

In figura 5, è riportata una versione realizzata da Laplace, del *dilatometro* di tipo *lineare*, che è uno strumento che consente di verificare l'aumento di lunghezza di una barra di qualsiasi materiale, tramite un ago che indica il progressivo aumento di lunghezza.

*Rotaia di Laplace*

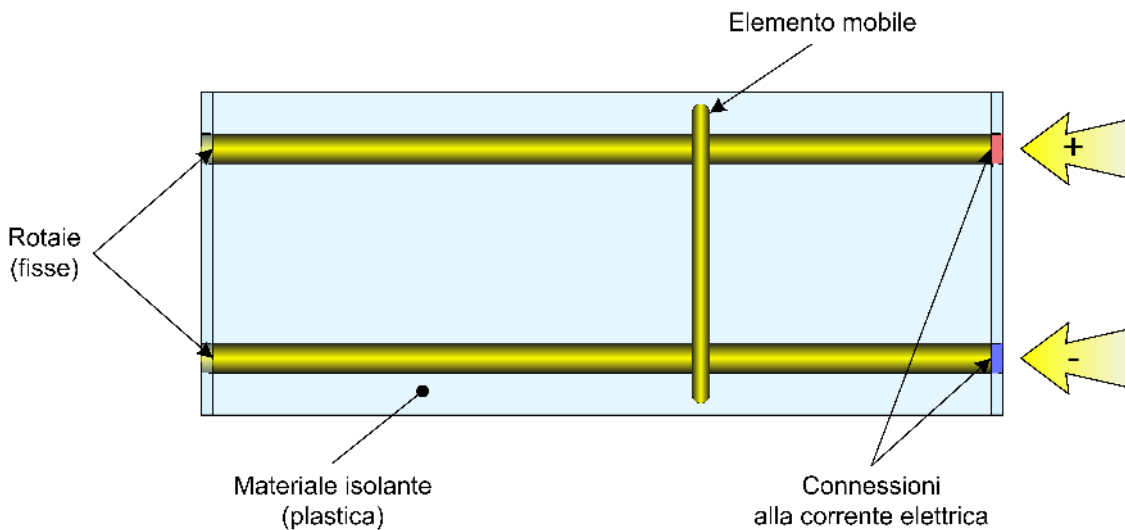


Figura 6 - Rappresentazione grafica del dispositivo (vista aerea).

Tale dispositivo, permette di mettere in evidenza l'azione di un campo magnetico su un conduttore mobile, posto su due elementi fissi, conduttori di corrente, consentendo di calcolare il valore del lavoro, risultante dallo spostamento dovuto alla forza elettromagnetica. Laplace, durante i suoi studi, formulò due *leggi sull'elettromagnetismo* e, per completare questa breve illustrazione della rotaia, è opportuno soffermarci sulla sua seconda legge.

*Seconda legge di Laplace sull'elettromagnetismo*<sup>13</sup>: un circuito  $c$ , percorso da una corrente

<sup>13</sup> Lo scienziato, formulò anche una *prima legge sull'elettromagnetismo*: un circuito  $c$ , percorso da una corrente di intensità  $i$ , genera nello spazio circostante un campo magnetico la cui intensità  $H$  nel generico punto  $P$  vale:

$$H_P = \frac{i}{4\pi} \int_c \frac{dl \wedge r}{r^3} ;$$

con  $dl$ , viene rappresentato l'elemento generico del circuito, orientato nel verso della corrente ed  $r$  la distanza

di intensità  $i$ , subisce da parte di un campo magnetico, un'azione elettromagnetica distribuita, il cui valore esplicitandosi cioè sui vari elementi, è pari alla *forza di Laplace*  $F$ , avente formula:

$$(1) \quad dF = i dl \wedge B \quad ;$$

ove integrando, si ottiene la formula (2), maggiormente impiegata rispetto alla (1) (*forma formale*):

$$(2) \quad F = \int_c dF = i \int_c dl \wedge B \quad ;$$

$dl$  è l'elemento in questione orientato nel verso della corrente,  $B$  è l'induzione del campo e l'operazione  $\wedge$  è definita come prodotto vettoriale.

Se il circuito od il campo, sono semplici ed uniformi, come ad esempio nella rotaia, la forza agente su un tratto rettilineo di circuito, di lunghezza  $l$  ed ortogonale al campo, vale:

$$(3) \quad F = i l B \quad .$$

Concludendo, è bene notare che, nello studio dei fenomeni dell'elettromagnetismo, esistono altre applicazioni del tutto analoghe alla rotaia, quali il *magnete*, la *spira* e l'*apparecchio a mercurio*<sup>14</sup> di Laplace.

---

orientata da  $dl$  a  $P$ .

14 *Apparecchio a mercurio di Laplace*: è un circuito composto da una batteria di cui, il terminale positivo, è immerso perpendicolarmente alla superficie di una vaschetta, riempita di mercurio liquido, mentre il terminale negativo, è collegato alla vaschetta metallica. Dando corrente al circuito, ed avvicinando un magnete al terminale positivo, quest'ultimo spostandosi, descrive un angolo  $\alpha$  rispetto alla superficie del liquido. Tale esperimento, permise a Laplace, di formulare una variante della sua seconda legge sull'elettromagnetismo:

$$F = i l B \sin \alpha \quad .$$

Oggigiorno, a causa dei rischi legati all'utilizzo del mercurio, viene impiegato in sostituzione, un filo conduttore flessibile.

## Bibliografia e sitografia

- ◆ La biografia e parte della discussione delle opere di Laplace, sono tratte da:
  - <http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/Index/L.html>, alla voce *Laplace, Pierre-Simon*;
  - [http://www.beaumontenauges.net/ps\\_laplace.html](http://www.beaumontenauges.net/ps_laplace.html);
  - <http://www.academie-francaise.fr/immortels/index.html>, alla voce *Laplace (Pierre-Simon de), Oeuvres*;
  - [http://www.academie-sciences.fr/Membres/in\\_memoriam/in\\_memoriam\\_liste\\_alphabetique\\_L.htm](http://www.academie-sciences.fr/Membres/in_memoriam/in_memoriam_liste_alphabetique_L.htm);
  - <http://www.royalsoc.ac.uk/Dserve/dserve.exe?dsqApp=Archive&dsqDb=Persons&dsqCmd=Search.tcl>, effettuare una ricerca alla voce *Surname: Laplace*;
  - <http://www2.polito.it/didattica/polymath/htmlS/info/Antologia/Laplace/LaProbabilit%0E0DelleTestimonianze.htm>;
  - <http://gallica.bnf.fr/>, effettuare una ricerca alla voce *Auteur: Pierre-Simon Laplace*;
  - **Lessico Universale Italiano** e <http://www.wikipedia.org>, voci varie, per i riferimenti agli altri personaggi ed alle definizioni proposte;
  - Autori vari, **Gli ultimi misteri della terra**, articolo: *Apocalisse in Siberia* di Walter Sullivan – Ed. Selezione dal Reader's Digest, anno 1977.
- ◆ Le note storiche, sono tratte da:
  - **Lessico Universale Italiano**, vol. VIII, alla voce *Francia*.
- ◆ Le immagini, per la parte biografica relative alle figure storiche, sono tratte da:
  - <http://www.chd.univ-rennes1.fr/default.htm>, alla voce *Les Source, Iconographies, Cinquante trois gravures de l'Histoire de la Révolution française* par A. Thiers.
- ◆ Le immagini dei frontespizi dei libri, sono tratte da:
  - <http://www.syllogismos.it/library.htm>, alla voce *Laplace, P.S.*;
  - [http://home.nordnet.fr/~ajuhel/villes\\_natales/Laplace/Laplace\\_Calva.html](http://home.nordnet.fr/~ajuhel/villes_natales/Laplace/Laplace_Calva.html).
- ◆ Per la discussione dei costrutti matematici ideati da Laplace:
  - <http://www.wikipedia.org>, voci varie;
  - **Lessico Universale Italiano**, vol. XI, alla voce *Laplace, Pierre-Simon de e laplaciano*;
  - A. Avvantaggiati, **Istituzioni di Matematica** - Ed. CEA, anno 1991.
- ◆ La descrizione e le immagini dei dispositivi fisici, sono tratte da:
  - *Calorimetro di Lavoisier – Laplace*:  
<http://www.parcodlseminario.it/museo/terminologia.htm> (descrizione ed immagine).
  - *Dilatometro di Laplace*:  
**Lessico Universale Italiano**, vol. VI, alla voce *dilatometro* (descrizione);  
<http://www.iisgiannone.it/Espo.Strum.Scientifici/> (immagine).
  - *Rotaia di Laplace*:  
<http://membres.lycos.fr/physapp/magnetisme/laplace.htm> (descrizione);

<http://66.51.111.198/index.htm> (immagine alla voce *Laplace*).



the 1990s, the number of people in the world who are under 15 years of age is expected to increase from 1.1 billion to 1.5 billion.

As a result of the demographic changes, the number of people in the world who are 65 years of age and older is expected to increase from 200 million in 1990 to 500 million in 2025. This increase is expected to be particularly significant in the developed countries.

The demographic changes are also expected to have a significant impact on the labor force. The number of people in the labor force is expected to increase from 1.5 billion in 1990 to 2.5 billion in 2025. This increase is expected to be particularly significant in the developing countries.

The demographic changes are also expected to have a significant impact on the economy. The number of people in the economy is expected to increase from 1.5 billion in 1990 to 2.5 billion in 2025. This increase is expected to be particularly significant in the developing countries.

The demographic changes are also expected to have a significant impact on the environment. The number of people in the environment is expected to increase from 1.5 billion in 1990 to 2.5 billion in 2025. This increase is expected to be particularly significant in the developing countries.

The demographic changes are also expected to have a significant impact on the social structure. The number of people in the social structure is expected to increase from 1.5 billion in 1990 to 2.5 billion in 2025. This increase is expected to be particularly significant in the developing countries.

The demographic changes are also expected to have a significant impact on the political system. The number of people in the political system is expected to increase from 1.5 billion in 1990 to 2.5 billion in 2025. This increase is expected to be particularly significant in the developing countries.

The demographic changes are also expected to have a significant impact on the cultural heritage. The number of people in the cultural heritage is expected to increase from 1.5 billion in 1990 to 2.5 billion in 2025. This increase is expected to be particularly significant in the developing countries.

The demographic changes are also expected to have a significant impact on the education system. The number of people in the education system is expected to increase from 1.5 billion in 1990 to 2.5 billion in 2025. This increase is expected to be particularly significant in the developing countries.

The demographic changes are also expected to have a significant impact on the health care system. The number of people in the health care system is expected to increase from 1.5 billion in 1990 to 2.5 billion in 2025. This increase is expected to be particularly significant in the developing countries.

The demographic changes are also expected to have a significant impact on the housing system. The number of people in the housing system is expected to increase from 1.5 billion in 1990 to 2.5 billion in 2025. This increase is expected to be particularly significant in the developing countries.

The demographic changes are also expected to have a significant impact on the transportation system. The number of people in the transportation system is expected to increase from 1.5 billion in 1990 to 2.5 billion in 2025. This increase is expected to be particularly significant in the developing countries.

The demographic changes are also expected to have a significant impact on the energy system. The number of people in the energy system is expected to increase from 1.5 billion in 1990 to 2.5 billion in 2025. This increase is expected to be particularly significant in the developing countries.

The demographic changes are also expected to have a significant impact on the water supply system. The number of people in the water supply system is expected to increase from 1.5 billion in 1990 to 2.5 billion in 2025. This increase is expected to be particularly significant in the developing countries.