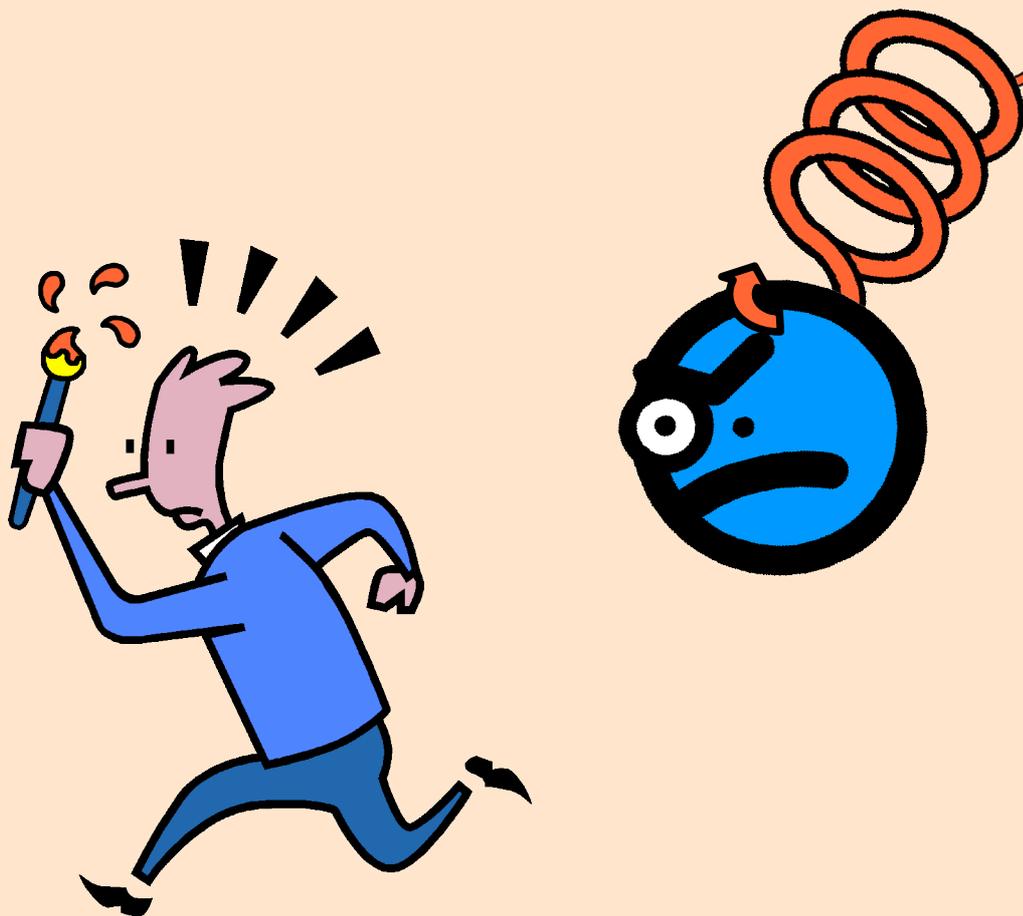


Progetto di
"Modelli Fisici per la Realtà Virtuale"

Simulazione di un pendolo con molla



di Cavenaghi Mattia
matricola 640926

Indice

Il modello fisico

- ▶ Descrizione del sistema pag. 1
- ▶ Caratteristiche geometriche degli elementi pag. 1
- ▶ L'equazione del pendolo con molla pag. 3

Il modello in linguaggio Simulink®

- ▶ Introduzione pag. 6
- ▶ Il pendolo con molla in Simulink® pag. 6
- ▶ Il pendolo con molla: $\frac{\theta}{d\theta}$ pag. 10

Il modello fisico

Descrizione del sistema

L'esperimento assegnatomi, consiste nella simulazione di un pendolo dotato di molla: tale sistema (*figura 1*), è composto da tre elementi: un perno che funge da vincolo con zero gradi di libertà, una molla collegata al perno attraverso l'estremo A ed una massa la quale, muovendosi nel piano bidimensionale, è dotata di due gradi di libertà rappresentati dalle coordinate del suo centro di gravità (x_{CG} , y_{CG}) la quale a sua volta, è vincolata all'estremo B della molla.

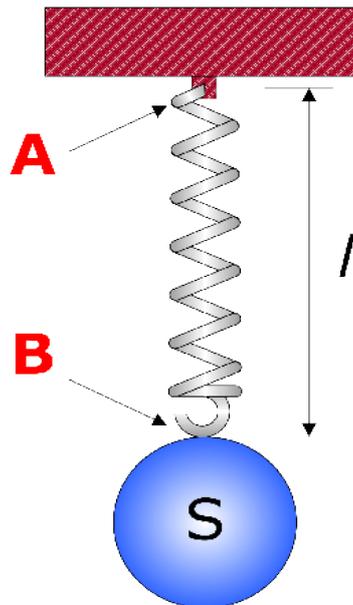


Figura 1: Il pendolo a riposo.

Caratteristiche geometriche degli elementi

Come si può notare dalla *figura 1*, la massa è di forma sferica, realizzata in materiale metallico, avente una densità pari a: $\rho_{\text{metallo}} = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ inoltre, essendo il suo diametro di 1 cm, posso facilmente ricavarne le caratteristiche geometriche, attraverso le seguenti formule:

$$m = V_{\text{sfera}} \rho_{\text{metallo}} \rightarrow [\text{kg}] = [\text{m}^3] \cdot \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

dove:

$$V_{\text{sfera}} = \frac{4}{3} \pi r^3 \rightarrow [\text{m}^3] = \text{costante} \cdot \text{costante} \cdot [\text{m}^3]$$

Calcolo quindi il volume di S:

$$V_{\text{sfera}} = \frac{4}{3} \pi (1 \cdot 10^{-2} \text{ m})^3 = 4,188 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

e successivamente la sua massa:

$$m = 4,188 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 = 32,666 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = 3,266 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$$

Avendo il raggio, la massa ed il volume della sfera, posso ora valutare il *momento d'inerzia* di quest'ultima, ossia *come la massa dell' oggetto, è distribuita all'interno del volume, rispetto al suo centro di gravità*: poichè una sfera, non è altro che la proiezione nelle tre dimensioni della rotazione di un cerchio, rispetto al suo diametro, ricaviamo che il *momento d'inerzia* per i tre assi: X, Y, Z, risulta essere:

$$I_{x,y,z} = \frac{2}{5} m r^2 \rightarrow [kg \cdot m^2] = costante \cdot [kg] \cdot [m^2]$$

$$I_{x,y,z} = \frac{2}{5} \cdot 3,266 \cdot 10^{-2} kg \cdot (1 \cdot 10^{-2} m)^2 = 1,306 \cdot 10^{-6} kg \cdot m^2$$

Il secondo elemento coinvolto nell'esperimento, è la molla: nella mia simulazione, ho scelto di modellizzare una molla senza massa, dotata di una lunghezza a riposo, pari ad l metri ed avente una costante elastica k .

Riassumendo, le caratteristiche dei due oggetti sono (figura 2):

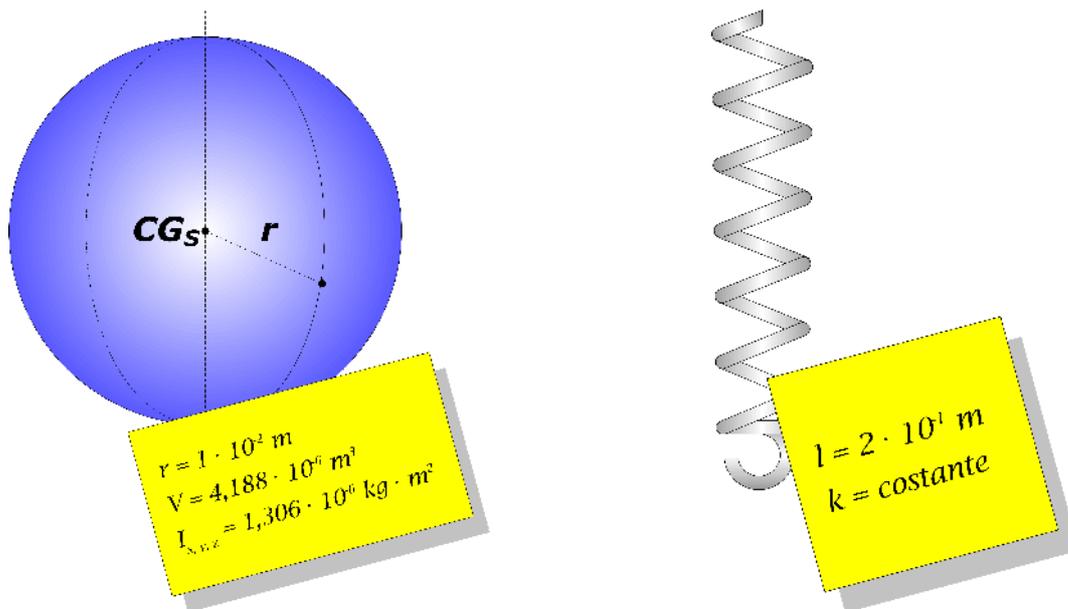


Figura 2: La figura, riassume le caratteristiche geometriche della sfera e della molla.

L'equazione del pendolo con molla

La massa sferica S , viene identificata nel piano bidimensionale tramite il suo *centro di gravità* (CG_S), avente coordinate (x_{CG}, y_{CG}) , per rendere immediati i calcoli, ho convertito le coordinate cartesiane in coordinate polari:

$$CG_S = (x_{CG}, y_{CG}) = (l \cos \theta, l \sin \theta)$$

dove l corrisponde alla lunghezza della molla a riposo e θ , corrisponde all'angolo che quest'ultima forma con la normale N , ossia l'asse perpendicolare, passante per l'estremo A della molla (figura 3):

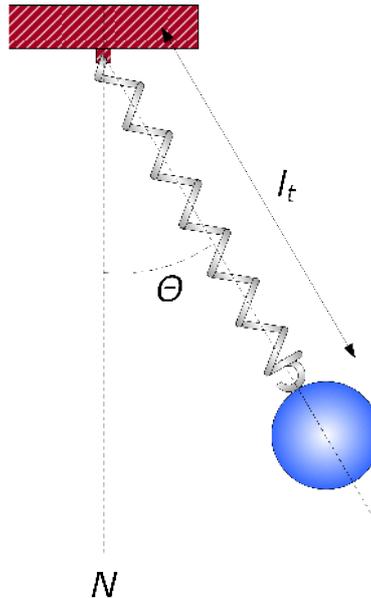


Figura 3: Il pendolo sottoposto a lavoro.

Per poter descrivere come S si muove, oltre alle coordinate CG_S , è necessario conoscere con quale velocità essa si muove, da un punto all'altro del piano: per far ciò, calcolo la derivata prima nel tempo, del *centro di gravità*:

$$\begin{cases} \dot{x}_{CG} = \frac{\partial}{\partial t} (l \sin \theta) = l \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y}_{CG} = \frac{\partial}{\partial t} (l \cos \theta) = -l \dot{\theta} \sin \theta \end{cases}$$

e tramite il teorema di Pitagora, per il calcolo della distanza tra due punti nel piano, calcolo la velocità:

$$v = CG_S = \sqrt{(\dot{x}_{CG})^2 + (\dot{y}_{CG})^2} = (l \dot{\theta} \cos \theta, -l \dot{\theta} \sin \theta)$$

A questo punto, il lavoro compiuto dal pendolo, è pari alla somma dell'*energia cinetica* della sfera (T):

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (CG_S)^2 = \frac{1}{2} m (l^2 + (l \dot{\theta})^2)$$

e dell'*energia potenziale* (U), influenzata sia dalla *forza di gravità* (g , pari a 9.8 m/s^2) che dalla molla:

$$U = -m g y_{CG} + \frac{1}{2} k (l_t - l)^2 = -m g (l \cos \theta) + \frac{1}{2} k (\Delta l)^2$$

L'energia potenziale dovuta alla molla, è risultato del seguente integrale:

$$\int_l^{l_t} k l \, dl = \frac{1}{2} k (l_t - l)^2 = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2$$

dove l_t è la lunghezza della molla (l_c compressa o l_d distesa), nell'istante di tempo t (figura 4).

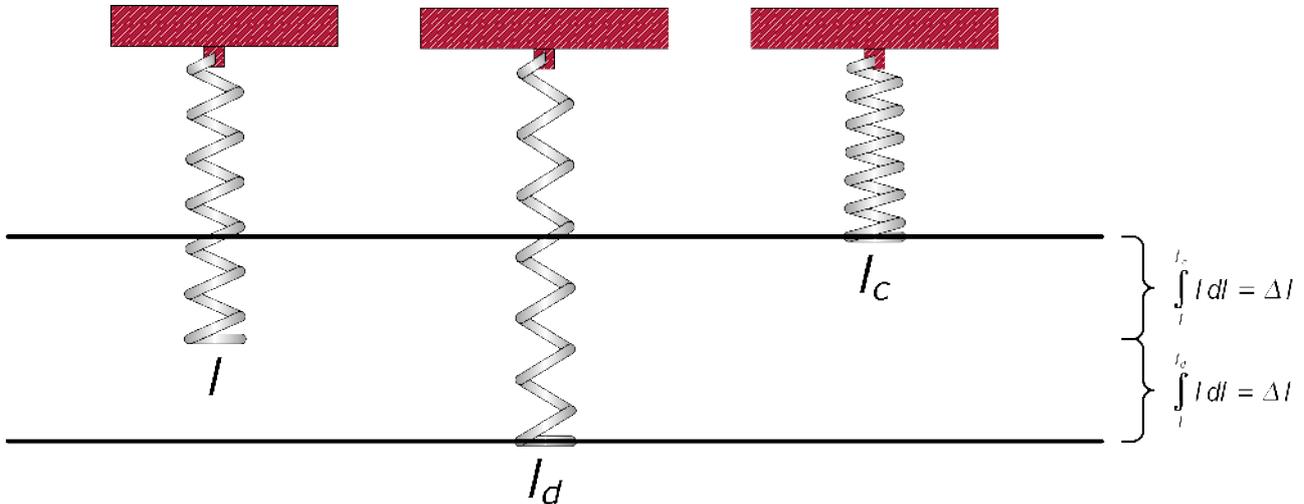


Figura 4: La figura mostra come è possibile calcolare, attraverso l'uso dell'integrazione, lo scostamento che la molla compie in fase di compressione o distensione.

Grazie al principio di lavoro-energia: il lavoro compiuto dalle forze non conservative, agenti su un oggetto, è uguale alla variazione totale in energia cinetica e potenziale:

$$W = \Delta T + \Delta U$$

posso ricavare facilmente l'equazione lagrangiana del pendolo:

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{l}^2 + (l \dot{\theta})^2) + m g (l \cos \theta) - \frac{1}{2} k (l_t - l)^2$$

L'equazione di Lagrange, per i sistemi non conservativi, nella forma generale è:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

dove L è l'equazione lagrangiana del sistema in analisi e q_j ($j = 1, 2, 3, \dots, n$), è l'incognita che nel mio caso, corrisponderà alle coordinate utili ad identificare il pendolo, ossia la lunghezza e l'angolo (l, θ) che la molla, soggetta al lavoro, descrive nel piano.

Come prima incognita, calcolo L in funzione di l :

$$\frac{\partial L}{\partial l} = m \dot{l}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{l}} = m \ddot{l}$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} = m l \dot{\theta}^2 + m g (\cos \theta) - k (l_t - l)$$

e come seconda incognita, calcolo L in funzione di θ :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m l^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \ddot{\theta} + 2 m l \dot{l} \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Theta} = -m g l \sin \Theta$$

In conclusione, le equazioni del moto del pendolo con molla sono:

- ▶ in funzione della lunghezza variabile della molla l :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{l}} - \frac{\partial L}{\partial l} = m \ddot{l} - m l \dot{\Theta}^2 - m g (\cos \Theta) + k (l_t - l) = 0$$

- ▶ in funzione dell'angolo Θ che la molla descrive la *normale* N :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial L}{\partial \Theta} = m l^2 \ddot{\Theta} + 2 m l \dot{l} \dot{\Theta} + m g l \sin \Theta = 0$$

Il modello in linguaggio Simulink®

Introduzione

Prima di illustrare la parte "pratica" del mio progetto, è opportuna una breve introduzione sul linguaggio *Simulink*®, impiegato per realizzare la simulazione del sistema assegnatomi.

Dalla guida, presente in *Matlab*®, leggiamo che:

«*Simulink*® è un pacchetto software che permette di modellare, simulare ed analizzare sistemi che evolvono dinamicamente ed i cui stati e dati di output, variano nel tempo...».

Infine, proseguendo nella lettura:

«Come prima cosa» (in *Simulink*®) «attraverso l'apposito editor, si crea un modello grafico del sistema da simulare, dipendente dal tempo, attraverso relazioni matematiche che legano gli i dati di input, di output e gli stati...».

In sostanza, si inseriscono come dati di input del modello, degli elementi grafici chiamati *blocchi* che svolgono specifiche funzioni: ad esempio, nel mio progetto, ho impiegato in larga parte, i blocchi relativi al pacchetto *SimMechanics*®, dove è possibile simulare ed analizzare sistemi composti da corpi rigidi, regolati dalle *leggi fisiche di Newton*.

Una volta ottenuto il modello, ho scelto di adoperare il pacchetto per la *realtà virtuale* (Virtual Reality Toolbox), interfacciabile con *Simulink*®, sempre attraverso gli opportuni blocchi.

Il pendolo con molla in Simulink®

La seguente figura, riporta il modello così come l'ho realizzato:

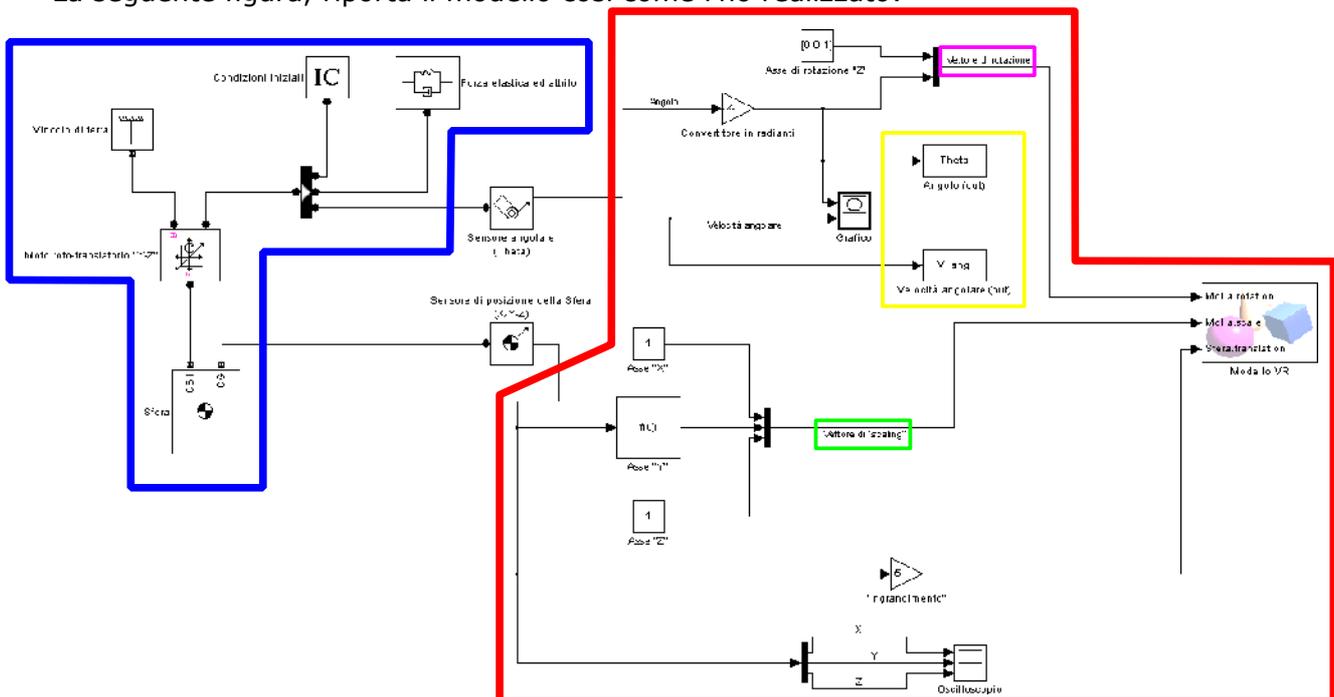


Figura 5: Il modello del pendolo con molla, realizzato tramite Simulink®.

Come si può notare dalla *figura 5*, è possibile distinguere due parti distinte: il modello del pendolo e la rappresentazione virtuale dello stesso.

Il modello del pendolo, evidenziato in blu, costituisce il motore fisico vero e proprio della simulazione. Esso è composto da:

- *Vincolo di terra*: rappresenta il vincolo avente zero gradi di libertà, a cui è fissata la molla, attraverso l'estremo A (*figura 1*). Il vincolo di terra inoltre, è caratterizzato nello

spazio, dal vettore $[X \ Y \ Z]$, di coordinate $[0 \ 0 \ 0]$;

- *Moto roto-translatorio "Y-Z"*: osservando la figura 6:

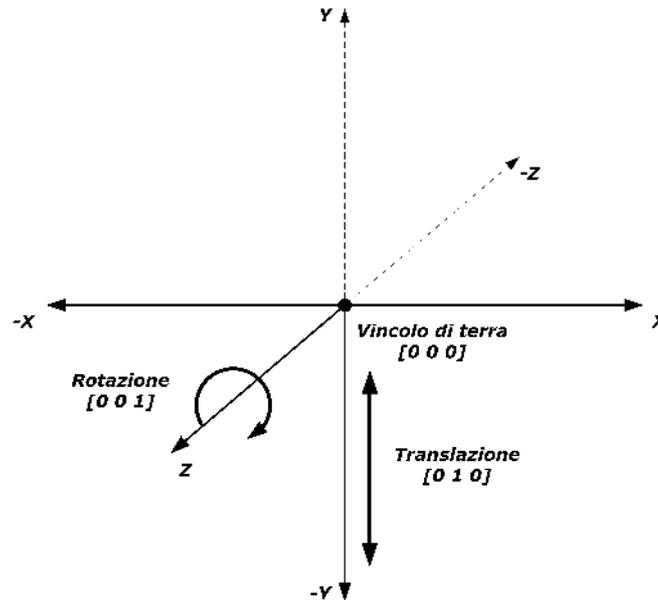


Figura 6: La figura mostra il sistema di coordinate adottato in Simulink[®]: in linea continua sono evidenziati gli assi di riferimento coinvolti nella mia simulazione.

possiamo comprendere, come la sfera, vincolata alla molla, si muove nel piano. In particolare, la rotazione e la traslazione, avvengono tramite gli opportuni vettori $[X \ Y \ Z]$ indicati in figura; date le coordinate del corpo o del sistema da "muovere", viene effettuato un prodotto tra il vettore delle coordinate dell'oggetto in questione (o del sistema di riferimento) e, il vettore di "movimento";

- *Sfera*: rappresenta l'oggetto massivo della simulazione: la sfera di metallo. Ad essa sono associati i seguenti parametri:
 - ⇒ *la massa ed il momento d'inerzia*: calcolate nella prima parte di questo progetto, le quali descrivono le caratteristiche geometriche del corpo nello spazio (in particolare la massa ed il volume);
 - ⇒ *la posizione nello spazio del centro di gravità*: il vettore che rappresenta questo parametro, corrisponde alle coordinate $[X \ Y \ Z]$ pari a $[0 \ -0.2 \ 0]$, dove la coordinata Y, rappresenta la lunghezza della molla a riposo;
 - ⇒ *la posizione dei connettori del corpo* (verso il mondo esterno): anch'esso vettore di coordinate $[X \ Y \ Z]$ pari a $[0 \ 0 \ 0]$, descrive dove l'oggetto è ancorato fisicamente nello spazio: nel mio modello, la sfera è vincolata direttamente al vincolo di terra.
- *Forza elastica ed attrito*: l'omonimo blocco, presente nel modello, caratterizza la forza esercitata dalla molla, espressa tramite la seguente formula:

$$F = -k (x - x_0) - b v$$

I parametri caratterizzanti la molla, sono:

- ⇒ k : la costante elastica;
- ⇒ b : il coefficiente di attrito;
- ⇒ x_0 : la lunghezza della molla a riposo; parametro non inserito poichè già fissato come coordinata Y nel vettore del *centro di gravità*, della sfera;
- ⇒ x : la lunghezza della molla al momento t ;
- ⇒ v : la velocità angolare attuale della sfera.

La precedente formula, non è stata considerata nell'*equazione del pendolo*, poichè il coefficiente di attrito, può essere omissso al momento della simulazione, dando luogo

un moto simile al *moto armonico semplice*, in contrapposizione ad un *moto di tipo smorzato*.

- *Condizioni iniziali*: tramite questo blocco, è possibile fissare l'angolazione iniziale ed eventualmente la velocità angolare iniziale a cui è soggetto il pendolo. Sebbene l'inserimento della velocità iniziale sia facoltativo, è necessario stabilire un angolo iniziale: senza questo parametro, non si avrebbe la simulazione voluta.

La seconda parte del modello in *Simulink*[®], rende possibile l'animazione del pendolo, tramite il pacchetto della *realtà virtuale*, implementato in *Matlab*[®]. Sebbene l'insieme di blocchi che costituisce questa seconda parte, sia di dimensioni maggiori rispetto al *modello fisico* vero e proprio, gli elementi basilari per la visualizzazione grafica, sono:

- *Sensore di posizione della Sfera*: permette di rilevare le coordinate [X Y Z] nello spazio, del *centro di gravità* della sfera; grazie a questo blocco è possibile costruire tutta la parte di VR del modello inoltre, ho impegnato il sensore, per muovere l'elemento grafico della sfera nella simulazione;
- *Vettore di rotazione*: il valore dell'angolo descritto dal pendolo, viene rilevato tramite un ulteriore sensore, chiamato *Sensore angolare (Theta)*; tale parametro, viene convertito in radianti (ossia moltiplicato per il valore costante di 0.01745 rad) ed inserito in un vettore di quattro elementi, di tipo [rotX rotY rotZ Θ]: il *vettore di rotazione*.
- *Vettore di "scaling"*: il secondo fattore che influenza il moto del pendolo, è come abbiamo visto, la lunghezza della molla, la quale varia in ogni istante. Nel *vettore di scaling*, ho scelto, per rendere più realistica la simulazione, di impiegare il teorema di Pitagora, per il calcolo della lunghezza della molla nell'istante di tempo t.

Per comprendere meglio ciò che ho fatto, ci può essere d'aiuto, far riferimento alla *figura 7*:

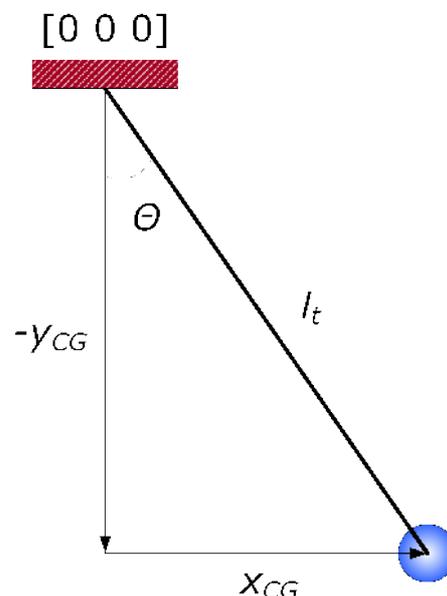


Figura 7: La figura illustra gli operandi per il calcolo del fattore di scaling.

La seguente formula, per il calcolo del *fattore di scaling*, è stata inserita come funzione personalizzata la quale elabora il vettore d'ingresso, proveniente dal sensore collegato alla sfera; è da notare che $u(1)$ ed $u(2)$, corrispondono rispettivamente alla coordinata X ed Y della posizione della sfera:

$$l_t = \sqrt{(x_{CG}^2 + y_{CG}^2)} \rightarrow \text{Molla.Scale} = \text{sqrt}(\text{pow}(u(1), 2) + \text{pow}(u(2), 2))$$

Il *modello di VR*, riceve in ingresso un ulteriore vettore: [moltX moltY moltZ], dove

"*molt*" è un parametro di fattorizzazione della corrispondente coordinata. Nel mio caso, lo *scaling*, deve verificarsi solamente sull'asse Y dell'elemento, cosicché gli assi X e Z, rimangono inalterati (moltiplicati quindi, per la costante 1).

- *Oscilloscopio*: visualizza tramite un grafico, la posizione della sfera nel tempo, associando ad ogni coordinata [X Y Z] del *centro di gravità*, un grafico differente;
- "*Ingrandimento*": è un semplice parametro di fattorizzazione la quale permette di inserire nel *modello VR*, le coordinate della sfera, opportunamente riscalate per un'adeguata rappresentazione virtuale;
- *Modello VR*: quest'ultimo blocco, è il collegamento che permette al *modello fisico* di "far muovere" gli elementi del *modello virtuale*, realizzato tramite l'editor grafico *V-Realm Builder*®, integrato in *Matlab*®.

La seguente *figura 8*, mostra gli elementi da cui è costituito il *modello virtuale*:

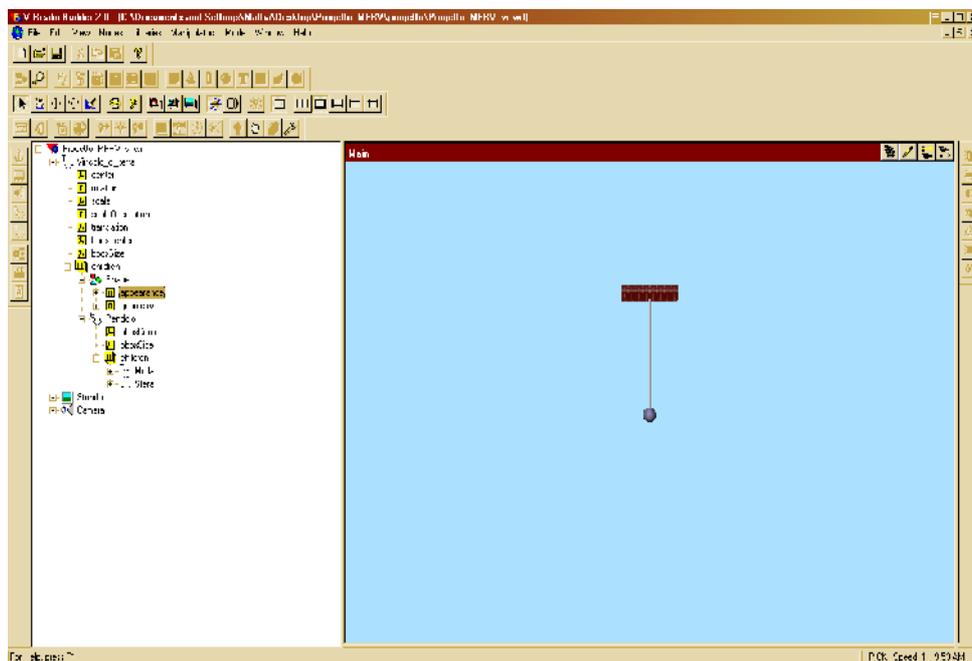


Figura 8: La schermata dell'editor di *V-Realm Builder*®: a sinistra l'albero contenente gli elementi del modello virtuale, a destra il modello virtuale del pendolo.

Si posso riconoscere:

- ⇒ il *Vincolo_di_terra*: identificato da un semplice parallelepipedo;
- ⇒ la *Molla*: identificato da un cilindro, avente raggio molto piccolo;
- ⇒ la *Sfera*: identificato appunto, da una sfera.

Il pendolo con molla: $\frac{\Theta}{d\Theta}$

Per concludere questa mia relazione, inserisco alcuni esempi di grafico, rappresentanti il rapporto che sussiste tra l'angolo e la velocità angolare realizzate dal pendolo, durante la simulazione.

I dati necessari al tracciamento dei grafici, sono stati rilevati tramite il *Sensore angolare (Theta)* e, per ottenere delle linee apprezzabili, campionati ogni 0.025 secondi tramite i due blocchi evidenziati in giallo nella *figura 5*.

Di seguito, riporto alcuni esempi di tali grafici generati in 10 secondi di simulazione e con parametri differenti (velocità iniziale, costante elastica e coefficiente di attrito):

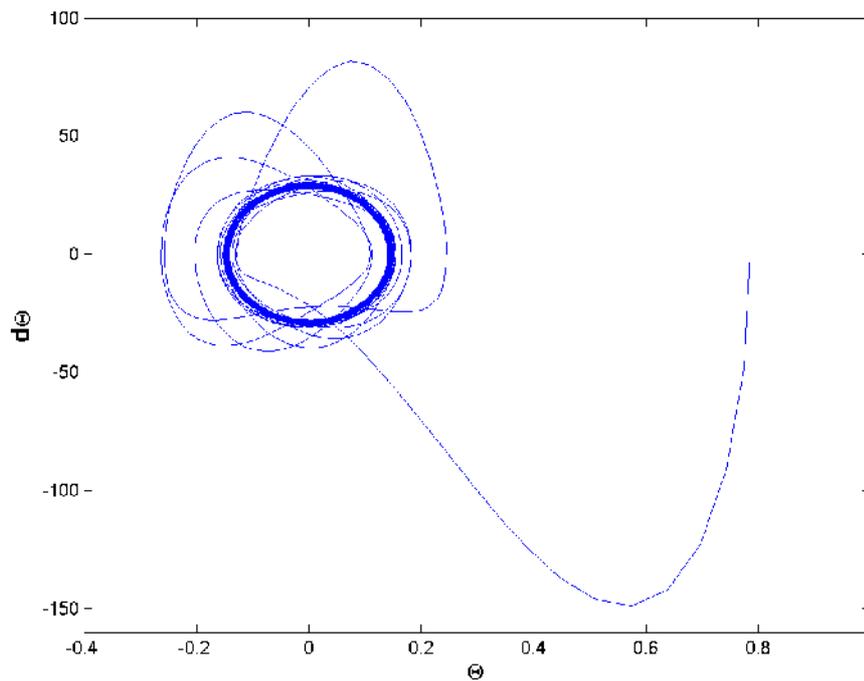


Figura 9: Parametri di simulazione: Angolo iniziale (Θ): $45^\circ = 0.785$ rad; Velocità iniziale ($d\Theta$): 0 rad/s; costante elastica (k): 0.5; coefficiente di attrito(b): 0.01.

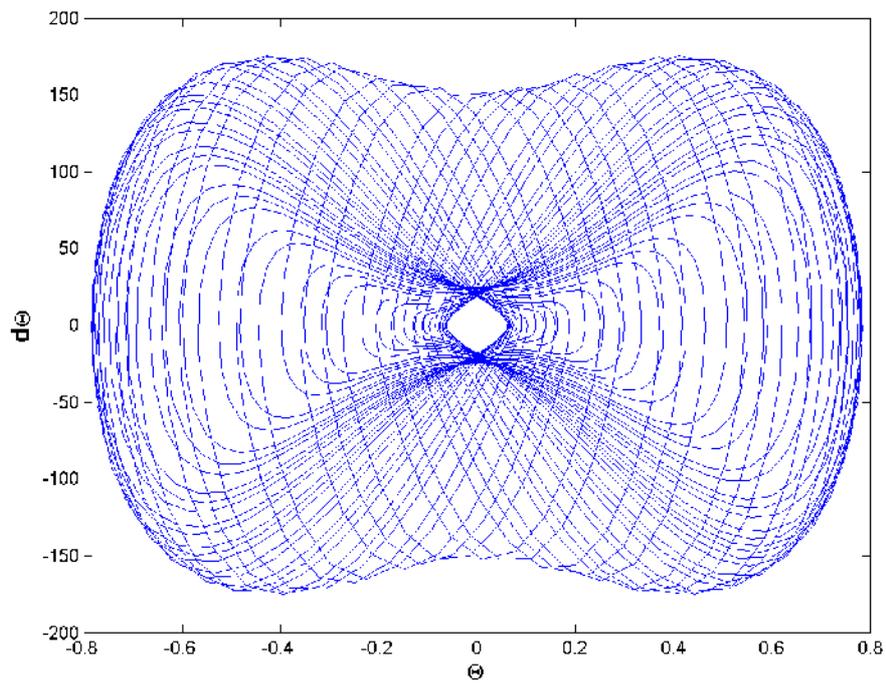


Figura 10: Parametri di simulazione: Angolo iniziale (Θ): $45^\circ = 0.785$ rad; Velocità iniziale ($d\Theta$): 0 rad/s; costante elastica (k): 0.5; coefficiente di attrito(b): 0.

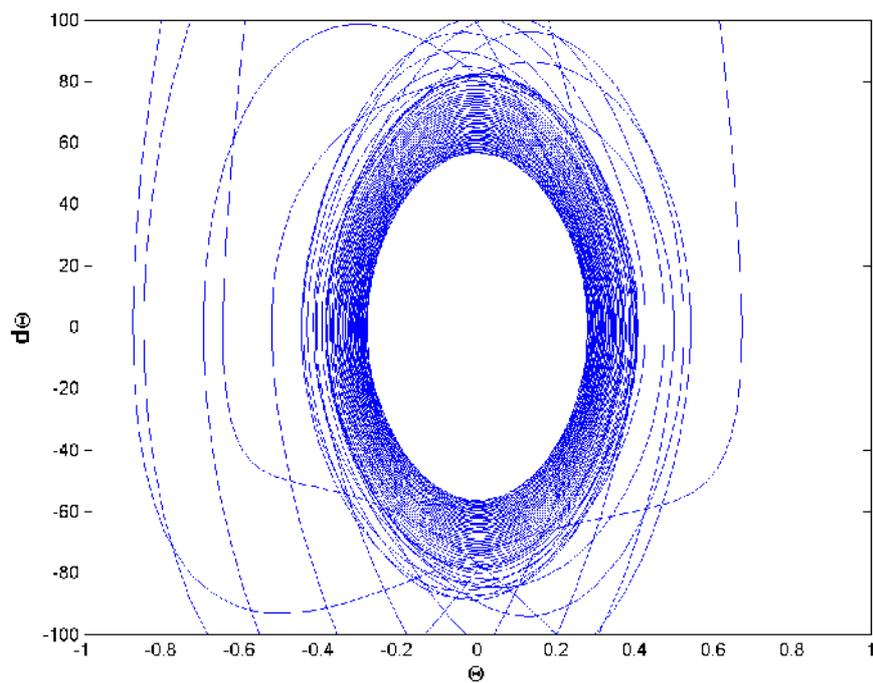


Figura 11: Parametri di simulazione: Angolo iniziale (Θ): $45^\circ = 0.785$ rad; Velocità iniziale ($d\Theta$): 10 rad/s; costante elastica (k): 0.5; coefficiente di attrito(b): 0.01.

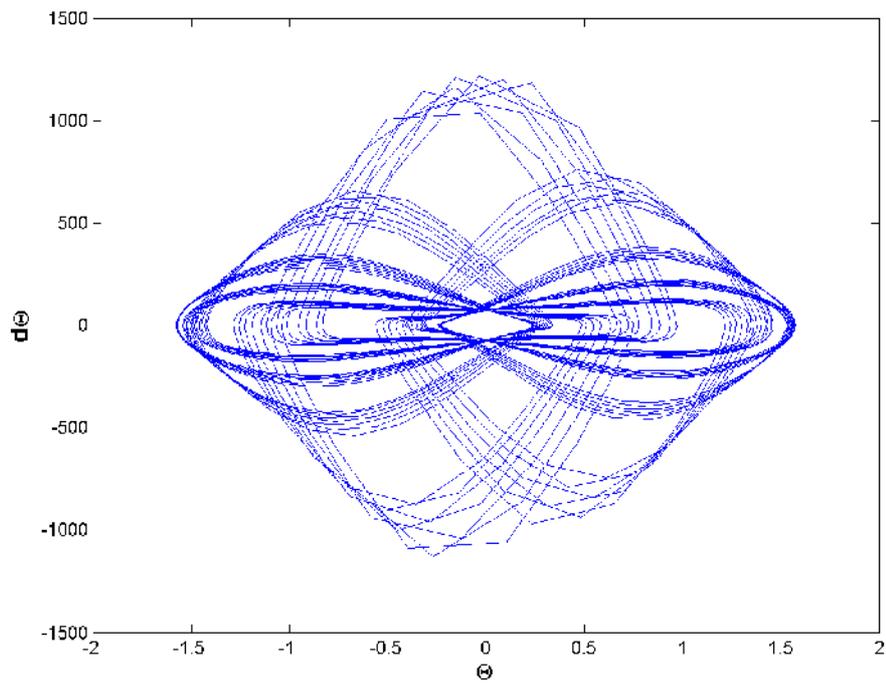


Figura 12: Parametri di simulazione: Angolo iniziale (Θ): $45^\circ = 0.785$ rad; Velocità iniziale ($d\Theta$): 10 rad/s; costante elastica (k): 0.5; coefficiente di attrito(b): 0.